Théorie quantique des champs

Théorie de jauge
Groupe de symétrie

S.A.F : Cours de Cosmologie 2013 par Jacques Fric

Principe de moindre action

On définit une action en mécanique classique par :

$$S = \int L(q_i, q'_i)\, dt$$

Où L appelé lagrangien est une fonction des coordonnées q_i, q'_i qui sont les coordonnées généralisées.

Les équations du mouvement vont s'obtenir par le principe de moindre action, l'expression de S est un extremum sur la trajectoire.

Le calcul général de cette condition s'exprime par l'équation de Lagrange.

Lagrangien

Le **lagrangien** $L(x^i, x'^i)$ d'un système dynamique est une fonction des variables dynamiques qui permet d'écrire de manière concise les équations du mouvement du système. Le lagrangien classique d'une particule est égal à l'énergie cinétique moins l'énergie potentielle.

$$L = \tfrac{1}{2} mv^2 - U(r)$$

$$L\left(x^\mu, \frac{dx^\mu}{dt}\right) = \frac{1}{2}\delta_{\mu\mu}\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)^2 - [U(x,y,z)+h]$$

L'équation de Lagrange s'écrit :

$$\left(\frac{d}{dt}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^\mu}{dt}\right)}\right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu}$$

On obtient l'équation du mouvement :

$$\frac{d^2 x^\mu}{dt^2} + \partial_\mu U(x,y,z) = 0$$

Lagrangien relativiste

$$L\left(x^{\mu}, \frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right)=\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x, y, z)\left[\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\frac{dx^{\nu}}{d\lambda}\right]=\frac{1}{2} ds^{2}$$

$$\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}\right)}\right)=\frac{\partial L}{\partial x^{\mu}}$$

Lagrangien en théorie des Champs

$$L = \int dx^4 \, \mathcal{L}\, (\Phi^i, \partial_\mu \Phi^i),$$

et en dérivant les équations du mouvement de l'équation de Lagrange :

$$\partial L/\partial \Phi^i - \partial_\mu[\partial L/\partial(\partial_\mu \Phi^i)] = 0.$$

Où $\mathcal{L}$ est la densité de lagrangien, Φ^i les champs, dx^4 l'élément de volume (à quatre dimensions en relativité générale).

Théorie de Jauge

Un Univers qui ne serait constitué que de quarks et de leptons serait ennuyeux et improductif. La dynamique est ce qui décrit leurs interactions, en particulier les états liés dans les hadrons et les atomes. Une conséquence intéressante de la Relativité et de la Mécanique Quantique est que leur interaction peut être décrite en termes d'échange de particules de médiation.

Ce n'est pas difficile à comprendre.

Considérons deux particules chargées, disons un proton et un électron, séparées par une distance finie. Etant chargées elles exercent l'une sur l'autre une action Coulombienne "électronique" . Supposons que nous déplacions légèrement le proton. Le champ environnant va changer , ainsi que son influence sur l'électron. Mais la Relativité Restreinte nous dit que la perturbation ne peut pas se propager plus vite que la lumière (pas d'action instantanée à distance).

Théorie des champs

La description moderne des forces s'appuie sur la notion de champ, donc la perturbation va moduler le champ entre le proton et l'électron. La mécanique quantique considère ces modulations comme des degrés de liberté dynamiques qui doivent être quantifiés comme les autres. Les excitations minimales (quanta) du champ sont interprétées comme des particules, et l'interaction entre un proton et un électron est décrit en termes d'échange de ces particules.

Comme les équations de Maxwell nous enseignent que le champ électromagnétique a des solutions ondulatoires, dont la lumière est un exemple, nous identifierons ces particules, associées au quanta du champ, aux photons qu'Einstein a introduit pour expliquer l'effet photo-électrique.

Théorie de jauge

Exemple des pions

Regardons comment ça marche sur un exemple simple, qui nous permettra également d'introduire le concept de champ, fonction de l'espace temps dont la quantification des excitations élémentaires seront interprétées comme des particules.
Nous nous en tiendrons à la Relativité restreinte (la Relativité Générale conduisant à un formalisme complexe rarement nécessaire, sauf en cas de conditions extrêmes, à proximité d'un trou noir par exemple). Un traitement plus exhaustif du champ Relativiste est présenté en annexes B et C.
Un pion, π^+ par exemple, a un spin de 0 et peut être représenté par un champ scalaire $\Phi(x)$ où x représente la coordonnée d'espace temps x^μ .Par une transformation de **Lorentz** $x \to x'$ et le champ se transforme comme suit:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \qquad (6.2)$$

Théorie de jauge

Théorie des champs relativistes

En théorie des champs Relativiste, il nous faut aussi décrire simultanément l'antiparticule π -. Ceci est nécessaire du fait que dans les réactions énergétiques des paires de pions peuvent émerger ex nihilo. Par exemple dans les collisions proton/proton, la réaction:

$p + p \rightarrow p + p + \pi^{+} + \pi$ est possible si l'énergie cinétique de la paire de protons incidente au centre de masse est supérieure à l'énergie de masse au repos des deux pions. On pourrait introduire deux champs scalaires $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ pour décrire respectivement le pion et l'antipion. Il est plus élégant de considérer $\Phi_1(x)$ *et* $\Phi_2(x)$ comme la partie réelle et imaginaire d'un champ complexe :

$$\Phi\,(x) = \rho(x)\, e^{i\theta(x)} = (\,\Phi_1(x) + i\,\Phi_2(x))/\sqrt{2}.$$

Théorie de jauge

Équation du mouvement

Si le champ est sans interactions, il va satisfaire l'équation (Klein-Gordon) relativiste du mouvement :

$$\Box\Phi(x) \equiv (\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2)\,\Phi(x) = m^2\,\Phi(x) \qquad (6.3)$$

où m est la masse du pion (Cette équation s'appliquant aussi pour le champ conjugué Φ^* qui associé à Φ peut produire deux états indépendants au lieu des deux fonctions $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$). Cette équation est invariante par transformation de Lorentz, car le d'alembertien $\Box$ et m^2 sont invariants tous les deux. Elle est la transposition, en termes d'opérateurs appliqués à la fonction d'onde, de l'équation de la norme du 4-vecteur **p** donnée par $p_\mu p^\mu = m^2c^2$, ($p \rightarrow \partial_\mu$).
L'équation (6.3) peut être dérivée de l'équation d'Euler Lagrange (cf B.27)

$$\partial L/\partial\Phi^* - \partial_\mu[\partial L/\partial(\partial_\mu\Phi^*)] = 0 \qquad (6.4)$$

Choix du Lagrangien

Si nous choisissons la densité de Lagrangien invariante par transformation de Lorentz L(x)

$$L(x) = \tfrac{1}{2}\,(\partial_\mu\Phi(x))^*(\partial^\mu\Phi(x)) + \tfrac{1}{2}\,m^2(\Phi^*(x)\Phi(x)) \qquad (6.5)$$

On note la convention d'Einstein de sommation, $\partial_\mu\partial^\mu = \partial_0\partial^0 + \partial_1\partial^1 + \partial_2\partial^2 + \partial_3\partial^3$.

Théorie de jauge

Invariance globale

On voit que (6.5) est invariant par changement de la phase d'une même valeur partout, $\boldsymbol{\Phi} \rightarrow e^{i\alpha}\boldsymbol{\Phi}$ avec $\boldsymbol{\alpha}$ **constant,** du fait de la présence des fonctions conjuguées.
Ceci est appelé une invariance globale du Lagrangien.

Invariance locale

Supposons maintenant que nous voulions que le Lagrangien soit aussi invariant par un changement de phase qui pourrait avoir une valeur différente en chaque point, $\boldsymbol{\alpha = \alpha\,(x)}$.
Ceci est appelé une invariance locale ou encore invariance de jauge.
Tel quel , les dérivées partielles ne permettent pas l'invariance. Nous sommes amenés à ajouter d'autres champs $A_\mu\,(x)$ à la dérivée avec les règles suivantes:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu\,(x) \qquad \textbf{(6.6)}$$

et poser

$$A_\mu\,(x) \rightarrow A_\mu\,(x) + \partial_\mu\ \ \alpha\,(x) \qquad \textbf{(6.7)}$$

Quand

$$\Phi\,(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)}\,\Phi(x)$$

Le champ $\boldsymbol{A_\mu}$ que nous avons ainsi introduit s'appelle le potentiel électromagnétique.

Théorie de jauge

Dérivée covariante de jauge

L'équation (6.6) définit D_μ la dérivée covariante de jauge, qui est similaire à la dérivée covariante que nous avons introduit en Relativité Générale (cf 3.36).

L'équation du mouvement devient alors:

$$(D_\mu D^\mu - m^2)\Phi(x) = 0 \tag{6.8}$$

qui décrit les propriétés électromagnétiques d'un champ scalaire chargé.

Démonstration: de l'invariance du Lagrangien par la dérivée covariante de jauge

$$D_\mu \phi(x) \rightarrow \partial_\mu \phi(x) - iA_\mu(x)\phi(x) \tag{6.6 bis}$$

$$D_\mu[e^{i\alpha(x}\Phi(x)] \rightarrow$$
$$\partial_\mu\phi(x).e^{i\alpha(x)} + i\,\phi(x).\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)} - iA_\mu(x)\phi(x).e^{i\alpha(x)} - i\,\phi(x)\partial_\mu\alpha(x)e^{i\alpha(x)} = \partial_\mu\phi(x).\,e^{i\alpha(x)} - iA_\mu(x)\phi(x).e^{i\alpha(x)}$$
$$= e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x)$$

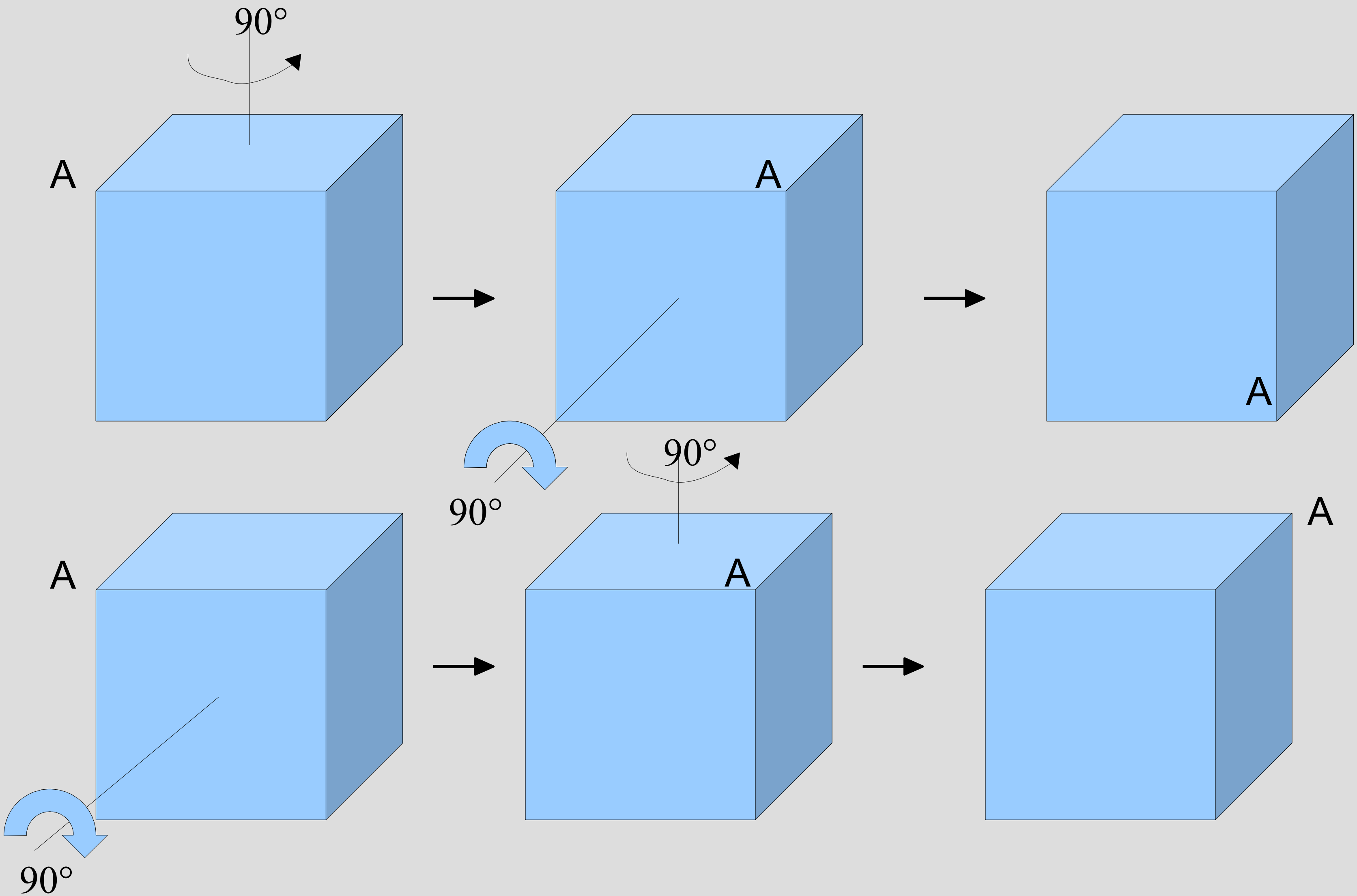
Le deuxième et le quatrième terme s'annulent. On peut alors mettre en facteur $e^{i\alpha(x)}$.
Le terme conjugué où $\Phi^*(x) \rightarrow \Phi(x)^*e^{-i\alpha(x)}$, donne $e^{-i\alpha(x)}[D^\mu\phi(x)]^*$.
Le produit $D_\mu D^\mu = e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x)\;e^{-i\alpha(x)}[D^\mu\phi(x)]^* = e^{-i\alpha(x)}e^{i\alpha(x)}D_\mu\phi(x)[D^\mu\phi(x)]^* = D_\mu\phi(x)[D^\mu\phi(x)]^*$ vérifie l'invariance.
Nota *: La position de l'indice μ dénote la convention de sommation d'Einstein. En espace de Minkowski on peut abaisser ou élever sans que cela change le résultat (ce qui ne serait pas le cas en relativité générale)*

Pour plus de détails voir: *http://www-cosmosaf.iap.fr/Dynamique_Relativiste.pdf*

Théorie de jauge : Signification physique de la méthode

- Tout cela a des allures de passe-passe où, à la fin, le magicien sort le lapin du chapeau (pas mexicain cette fois) : Mais qu'avons nous fait ?
- Nous avons voulu rendre la loi, du champ électronique de la particule chargée, invariante par un changement local de phase (invariance du lagrangien).
- Pour aboutir à cela, nous avons été conduit à introduire d'une part :
- Un nouveau type de dérivée (qui tient compte d'un champ comme en relativité générale la dérivée covariante tient compte de la courbure de l'espace temps) ce qui montre leur parenté.
- D'autre part, une loi de transformation de ce nouveau champ lorsqu'on opère un changement de phase.
- Ceci définit le nouveau champ (électromagnétique) avec ses lois de couplages au champ électronique.
- C'est ce qui fait dire que c'est la symétrie de jauge qui contraint et définit les lois de ce champ électromagnétique.

La non commutativité des rotations spatiales



La structure cachée des rotations spatiales

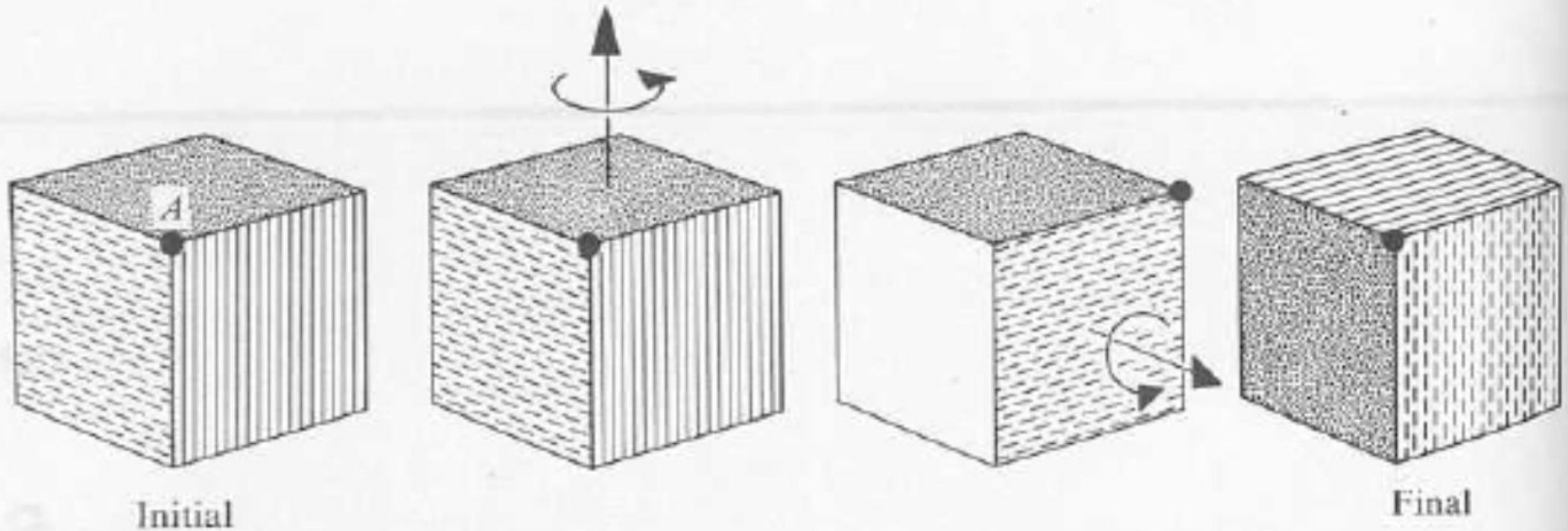


Figure 41.1.
Rotation about the vertical axis through 90°, followed by rotation about the horizontal axis through 90°, gives a net change in orientation that can be achieved by a single rotation through 120° about an axis emergent from the center through the corner *A*.

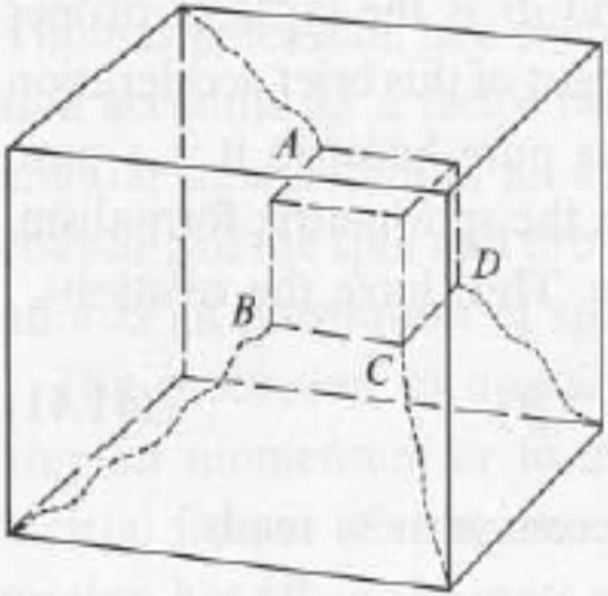


Figure 41.5.
"Orientation-entanglement relation" between a cube and the walls of a room. A 360° rotation of the cube entangles the threads. A 720° rotation might be thought to entangle them still more—but instead makes it possible completely to disentangle them.

Rotations spatiales et spineurs

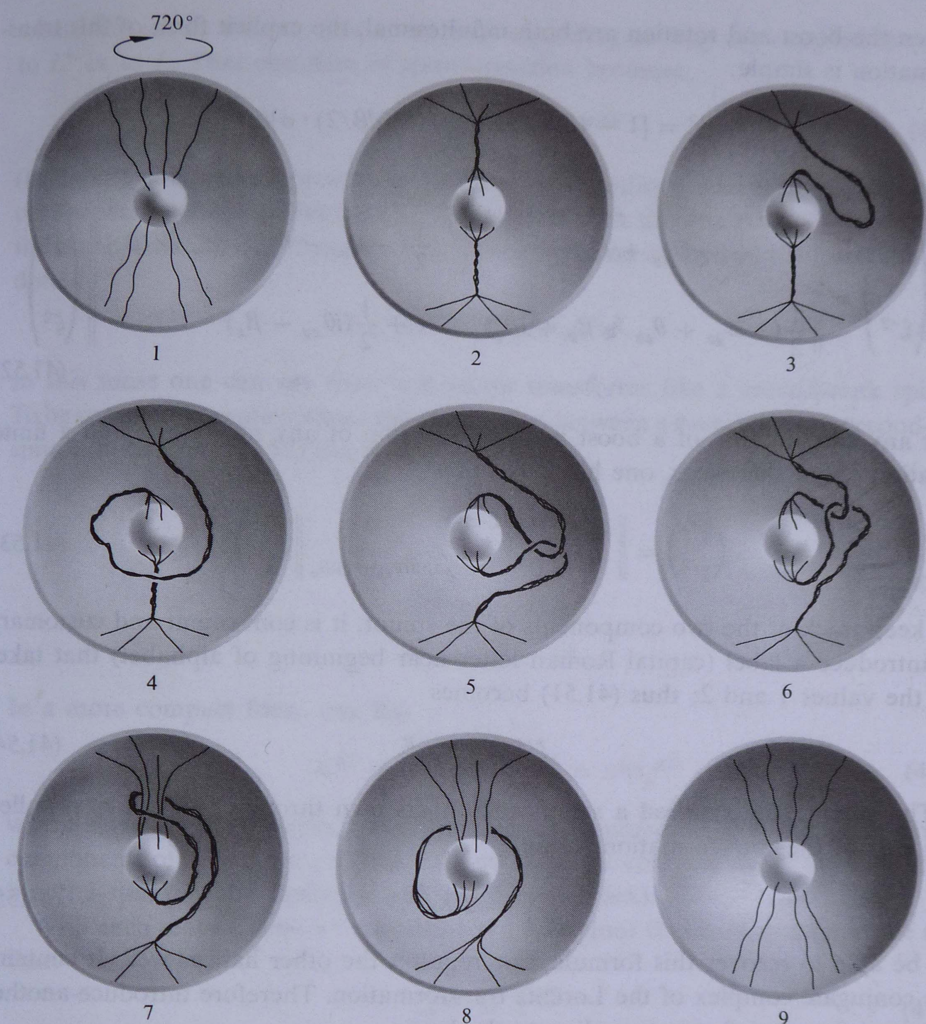


Figure 41.6.
An object is connected to its surroundings by elastic threads as in Figure 41.5. (Eight are shown here; any number could be used.) Rotating the object through 720° and then following the procedure outlined (Edward McDonald) in frames 2–8 (with the object remaining fixed), one finds that the connecting threads are left disentangled, as in frame 9 (lower right).

III LE GROUPE DE SYMÉTRIE C_{3V} DU TRIANGLE ÉQUILATÉRAL

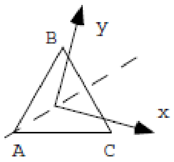


FIG. 1.2 - *Le choix d'axes Oxy correspond au choix de matrice $T(S_A)$ donné en (III_3)*

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral possède six éléments :

1) l'identité,

2) les rotations R_1 et R_2 d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$,

3) les trois symétries S_A, S_B et S_C par rapport aux trois hauteurs passant respectivement par A, B et C.

$\rightarrow$	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
I	I	R_1	R_2	S_A	S_B	S_C
R_1	R_1	R_2	I	S_B	S_C	S_A
R_2	R_2	I	R_1	S_C	S_A	S_B
S_A	S_A	S_C	S_B	I	R_2	R_1
S_B	S_B	S_A	S_C	R_1	I	R_2
S_C	S_C	S_B	S_A	R_2	R_1	I

La table de multiplication du groupe est donnée dans la table précédente (la vérifier et vérifier qu'il s'agit d'un groupe).

On peut prouver qu'il n'y a que trois représentations, dites irréductibles, (voir la suite pour une définition) :

1) tous les éléments du groupe sont représentés par 1.

2) les rotations et l'identité sont représentées par 1 et les symétries par -1.

3) une représentation matricielle donnée par :

$$T(I) = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(R_1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(R_2) = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$T(S_A) = \begin{pmatrix} & 1 \\ 1 & \end{pmatrix} \quad ; \quad T(S_B) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad ; \quad T(S_C) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{(III\_3)}$$

Il y a donc deux représentations de dimension 1 et une de dimension 2. Il est très instructif de vérifier que la table de multiplication du groupe est reproduite par chacune des représentations.

Groupes de Lie – groupes SO(3) et SU(2)

Le passage des groupes discrets comme C_{3V} aux groupes continus (infinité continue d'éléments) comme le groupe des rotations s'accompagne de pas mal de bouleversements quant aux représentations de ces groupes et on ne peut pas directement transposer en général aux groupes continus ce qui est valable pour les groupes discrets. Deux grandes catégories de groupe se distinguent de ce point de vue, les compacts, pour lesquels le(s) paramètre(s) du groupe varie(nt) sur un compact (exemple: les rotations où l'angle varie entre 0 et 2π) et les non compacts pour lesquels il n'en est pas ainsi (exemple: les translations où les paramètres varient sur tout $\mathbb{R}^D$, les transformations de Lorentz où la rapidité varie sur $\mathbb{R}^3$). Pour tous ces groupes, la notion de représentations irréductibles garde son sens mais leur nombre — toujours infini —, leur unitarité et leur dimension sont non trivials. Les groupes compacts sont ceux qui sont le plus proches des groupes discrets: presque tout se transpose, le nombre infini — discret — de représentations irréductibles unitaires étant la différence majeure. Nous allons voir maintenant en détail ce qu'il en est pour le groupe des rotations.

A Les vecteurs - algèbre de Lie du groupe des rotations

Effectuons, par exemple, une rotation des axes d'angle θ autour de Oz. Appelons $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ et $(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ les "vecteurs" de base des deux systèmes d'axes.

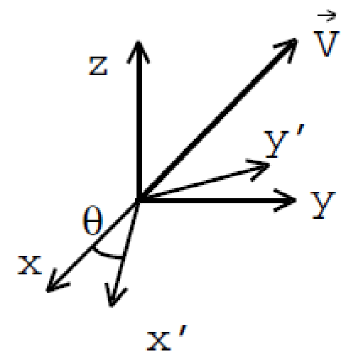


FIG. 2.1 - *Rotation (passive) du système d'axes*

Par définition, dans le point de vue passif, les vecteurs ne changent pas, seules leurs composantes le font. Ce changement de *composantes* est donné par[3] :

$$\sum_{i=1}^{3} V_i \vec{e}_i = \vec{V} = \sum_{j=1}^{3} V_j' \vec{e}_j{}' \tag{I\_1}$$

avec (attention aux signes)

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1{}' \\ \vec{e}_2{}' \\ \vec{e}_3{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} \tag{I\_2}$$

Par définition de la matrice R, on a donc :

$$\vec{e}_j{}' = \sum_{k=1}^{3} R_{jk}\, \vec{e}_k \tag{I\_3}$$

où, par conséquent, j est un indice de ligne et k un indice de colonne. On en déduit :

$$V_i = \sum_{j=1}^{3} V_j'\, R_{ji} = \sum_{j=1}^{3} ({}^tR)_{ij}\, V_j' = \sum_{j=1}^{3} (R^{-1})_{ij}\, V_j' \tag{I\_4}$$

car R est une matrice orthogonale (i.e. de rotation) et donc $R^{-1} = {}^tR$. On en déduit donc :

$$V_j' = \sum_{k=1}^{3} R_{jk}\, V_k \tag{I\_5}$$

Les composantes se transforment donc comme les "vecteurs" de base dans une transformation passive[4].

Il va être intéressant dans la suite de considérer les transformations infinitésimales car, d'une part, elles sont très simples et plus commodes à manipuler que les transformations finies et, d'autre part, on va montrer que l'on peut reconstruire les transformations finies à partir de ces transformations infinitésimales, si bien que l'on pourra, pour tout ce qui suivra, se limiter à ces transformations (voir cependant l'encadré II et la page 32). Prenons par exemple une rotation infinitésimale autour de l'axe Oz :

$$R = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & \\ -\delta\theta & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \tag{I.6}$$

et calculons $\delta V_i = V_i' - V_i$, on trouve :

$$\begin{pmatrix} \delta V_1 \\ \delta V_2 \\ \delta V_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & \delta\theta & \\ -\delta\theta & & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{pmatrix} \tag{I.7}$$

Appelons

$$J_z = J_3 = \begin{pmatrix} . & -i & . \\ i & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix} \tag{I.8}$$

alors[5]

$$\delta V_i = i\delta\theta \sum_{j=1}^{3} (J_z)_{ij} V_j \tag{I.9}$$

On peut définir de même[6] :

$$J_x = J_1 = \begin{pmatrix} . & . & . \\ . & . & -i \\ . & i & . \end{pmatrix} \quad ; \quad J_y = J_2 = \begin{pmatrix} . & . & i \\ . & . & . \\ -i & . & . \end{pmatrix} \tag{I.10}$$

Au niveau infinitésimal, au premier ordre, cosθ =1 et sinθ = δθ.

et on aurait les mêmes relations pour les rotations infinitésimales autour de Ox et Oy. Remarquons que

$$(J_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} \tag{I.11}$$

avec ϵ le tenseur totalement antisymétrique, i.e. antisymétrique dans l'échange de n'importe quelle paire d'indices et tel que $\epsilon_{123} = +1$. Il n'est pas très compliqué de retrouver l'effet d'une rotation finie autour Oz à partir de l'expression de la rotation infinitésimale car la rotation d'angle θ est la succession des N rotations d'angle θ/N considérées comme infinitésimales si $N \to \infty$.

$$V_i' = \sum_{j=1}^{3} \left(1 + i\frac{\theta}{N}J_z\right)^N_{ij} V_j \tag{I.12}$$

Or

$$\lim_{N\to\infty} \left(1 + i\frac{\theta}{N}J_z\right)^N = e^{i\theta J_z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!}(J_z)^k \tag{I.13}$$

soit

$$R(\theta, \hat{z}) = e^{i\theta J_z} \tag{I.14}$$

On peut d'ailleurs le vérifier directement :

$$\begin{aligned} e^{i\theta J_z} &= 1 + i\theta J_z + \frac{(i\theta)^2}{2}{J_z}^2 + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} & \theta & \\ -\theta & & \\ & & \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\theta^2/2 & & \\ & -\theta^2/2 & \\ & & 0 \end{pmatrix} + \ldots \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & \\ -\sin\theta & \cos\theta & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{I.15}$$

Les relations précédentes se généralisent pour une rotation autour d'un axe quelconque (ça n'est pas tout à fait trivial)[7] :

$$\boxed{R(\theta, \vec{n}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{J}} = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}} \tag{I.16}$$

où $\vec{\theta} = \theta\vec{n}$ avec $\vec{n}$ = vecteur unitaire suivant l'axe de la rotation et θ = angle de la rotation[8]. Attention, $\vec{J}$ est un "vecteur" dont chaque composante J_i est une matrice.

On a maintenant un résultat qui s'avérera très important pour la suite : l'ensemble des J_i est clos sous l'action du commutateur (le vérifier en se servant par exemple de I_11)) :

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} J_k \qquad (I\_17)$$

par exemple : $[J_x, J_y] = iJ_z$. Remarquons que ce ne sont pas des relations linéaires. L'ensemble des trois J_i munis de ces relations de commutation forme *l'algèbre de Lie* du groupe des rotations. On appelle *constantes de structure* du groupe $SO(3)$ les $i\epsilon_{ijk}$.

Exercice : Il est très commode, pour certains calculs, d'écrire J_i sous la forme $J_i = -i \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} |j\rangle\langle k|$ avec $|i\rangle = \vec{e}_i$. Vérifier cette relation et retrouver, grâce à elle, le commutateur de deux J quelconques.

En résumé, on a vu que l'on peut construire n'importe quelle rotation à partir des trois J_i seulement et que ces trois J_i vérifient une algèbre très simple de commutation.

Mais il y a beaucoup plus fort... Comme l'ensemble des rotations forme un groupe et qu'une rotation quelconque des composantes d'un vecteur peut s'écrire $\exp(i\vec{\theta}.\vec{J})$, il doit exister, pour chaque $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}'$, un $\vec{\theta}''$ tel que :

$$e^{i\vec{\theta}.\vec{J}} . e^{i\vec{\theta}'.\vec{J}} = e^{i\vec{\theta}''.\vec{J}} \qquad (I\_18)$$

Le calcul de $\vec{\theta}''$ en fonction de $\vec{\theta}$ et $\vec{\theta}'$ est non trivial et a conduit Hamilton à inventer les quaternions. On ne va pas effectuer ce calcul mais simplement se convaincre de (I_18). La formule suivante dite de Campbell - Hausdorff (et pas mal d'autres) :

$$e^A e^B = e^{A+B+\frac{1}{2}[A,B]+\ldots} \qquad (I\_19)$$

où tous les termes suivants, difficiles à calculer, s'expriment uniquement en fonction des commutateurs emboîtés de A et B,

$$[A,[A,B]] \ , \ [B,[A,B]] \ , \ [A,[A,[A,B]]] \ , \ \ldots \ ,$$

La relation (1-17) caractérise les rotations spatiales 3D.
Ce ne sont pas des propriétés intrinsèques des générateurs infinitésimaux, (qu'on pourrait croire censer en caractériser la nature structurelle, car toute rotation peut être réalisée par un enchaînement de telles rotations), mais l'algèbre de Lie donnant la relation entre ces générateurs qui est fondamentale. Ceci corroborre l'idéee que l'objet élémentaire d'un groupe n'a pas de structure propre mais que cette structure est définie de manière relationnelle avec les autres membres du groupe et que c'est bien le groupe qui est fondamental. (cf. « le nouvel esprit scientifique » de G. Bachlard par exemple).
Si les matrices J_i, générateurs de SO3 ont une struture (antisymétrique), c'est que SO3 n'est pas fondamental, mais les générateurs de SU_2 n'ont pas cette symétrie !

et le fait que les J_i forment un ensemble clos sous l'action du commutateur,

$$[J_{i_1}, [J_{i_2}, [\ldots, J_{i_n}]] \ldots] \propto J_j$$

nous montrent que l'équation (I.18) est bien vérifiée et donc que $\vec{\theta}\,''$ existe effectivement. Mais on en déduit aussi que $\vec{\theta}\,'' = \vec{\theta}\,''(\vec{\theta}, \vec{\theta}\,')$ est une fonction entièrement déterminée par les relations de commutation des J_i entre eux et donc que... [9]

Toute l'information sur la table de multiplication du groupe des rotations est codée dans l'algèbre de Lie du groupe.

On en déduit une conséquence très importante pour la suite. Supposons que nous cherchions les représentations en termes de matrices $N \times N$ du groupe des rotations. Supposons également que nous ayons trouvé 3 matrices $\mathcal{J}_i$, hermitiennes, $N \times N$, vérifiant la même algèbre que les J_i :

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} \mathcal{J}_k \tag{I.20}$$

alors l'ensemble des matrices

$$D(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{\mathcal{J}}} \tag{I.21}$$

vérifient obligatoirement la même table de multiplication que les $R(\vec{\theta})$ et forme donc une représentation unitaire de ce groupe[10]. On en conclut donc l'énorme simplification suivante :

Pour avoir une représentation du groupe des rotations en termes de matrices $N \times N$, il faut et il suffit d'obtenir une représentation de l'algèbre de Lie du groupe, i.e. d'avoir 3 matrices $N \times N$ qui vérifient les mêmes relations de commutation que celles existant entre les J_i et qui soient hermitiennes.

Forts de ce théorème, nous allons chercher ces représentations. Mais avant, un peu de vocabulaire.

1) Le groupe des matrices $R(\vec{\theta})$ est appelé $SO(3)$.

S = spécial $\Longleftrightarrow \det R = +1$,

O = orthogonal réel $\Longleftrightarrow$ R est une matrice de coefficients réels vérifiant ${}^tR = R^{-1}$,

3 = R est une matrice 3×3.

2) J_1, J_2, J_3 sont appelés les *générateurs* infinitésimaux du groupe.

3) Les relations de commutation entre les générateurs forment l'algèbre de Lie du groupe.

4) $\vec{J}^2 = \sum_i J_i^2$ commute avec tous les générateurs J_j. On l'appelle l'opérateur de Casimir du groupe. On peut montrer que c'est le seul (à un facteur près) opérateur construit avec les J_i qui a cette propriété. On peut en déduire grâce à un théorème, appelé le lemme de Schur, qu'il est par conséquent proportionnel à l'unité dans chaque représentation (mais le facteur de proportionnalité peut dépendre – et en fait dépend – de la représentation). On peut aussi montrer que toutes ses valeurs propres sont de la forme $j(j+1)$ avec j entier. Une représentation est donc étiquetée par une valeur de j.

4) Dans un espace de dimension trois, les objets qui se transforment lors d'une rotation par les matrices de $SO(3)$ sont appelés des *vecteurs* (dans un espace de dimension D le groupe devient $SO(D)$ et un vecteur a D composantes). $SO(3)$ est donc la représentation vectorielle du groupe des rotations d'un espace à trois dimensions[11].

Un vecteur pour un physicien est donc bien plus qu'un élément d'un espace vectoriel (ce qui est banal et seulement indicatif d'une structure linéaire), c'est un objet qui engendre la représentation $SO(3)$ du groupe des rotations (ce qui n'est pas trivial).

En fait, tout cela est connu intuitivement par tout le monde : il ne viendrait à l'idée de personne de mettre une flèche sur un nombre réel ou sur une fonction de carré sommable. Ce sont pourtant des éléments d'un espace vectoriel (à noter qu'en mécanique quantique, on a une autre notation pour les éléments de l'espace de Hilbert des fonctions de carré sommable : les kets).

Commençons notre recherche des représentations de $SO(3)$ par la ou les représentations de dimension 1. On cherche donc des $\mathcal{J}_i$ qui soient des nombres réels et qui vérifient l'algèbre

de Lie, Eq.(I.20). Comme deux nombres réels commutent toujours, on obtient comme seule solution $\mathcal{J}_i = 0$, soit, pour les "matrices" de la représentation : $D(\theta) = \exp(i\vec{\theta}.\vec{0}) = 1$. Donc la seule représentation de dimension 1 est la représentation triviale 1. C'est la représentation engendrée par les quantités dites scalaires qui sont invariantes sous les rotations. On vérifiera que c'est par exemple le cas pour le produit scalaire de deux vecteurs.
Continuons par...

B Représentation de dimension deux du groupe des rotations, groupe SU(2), spineurs

On a trouvé une représentation de dimension 1 et une de dimension trois du groupe des rotations et il n'est pas trivial a priori de savoir s'il en existe de dimension 2. La recette est toujours la même : chercher trois matrices, 2×2 dans ce cas-ci, qui vérifient l'algèbre de Lie du groupe, Eq.(I.20). Pour respecter les conventions usuelles de notation, nous appelons dans ce cas les générateurs $\sigma_x/2, \sigma_y/2, \sigma_z/2$. Il est facile d'en trouver : ce sont (une demi fois) les matrices de Pauli que nous notons $\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2$:

$$\frac{\sigma_x}{2} = \frac{\sigma_1}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\sigma_y}{2} = \frac{\sigma_2}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \frac{\sigma_z}{2} = \frac{\sigma_3}{2} = 1/2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{I.22}$$

On a en effet [12]

$$\left[\frac{\sigma_x}{2}, \frac{\sigma_y}{2}\right] = i\,\frac{\sigma_z}{2} \qquad \text{(le 1/2 est important)} \tag{I.23}$$

et permutations circulaires.
Les matrices de la représentation sont les $\left\{e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2}\right\}$. Or (le montrer) :

$$e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \cos\frac{\theta}{2}\mathbb{1} + i\sin\frac{\theta}{2}\,\vec{n}.\vec{\sigma} \tag{I.24}$$

soit

$$U(\vec{\theta}) = e^{i\vec{\theta}.\vec{\sigma}/2} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} + in_z\sin\frac{\theta}{2} & (in_x + n_y)\sin\frac{\theta}{2} \\ (in_x - n_y)\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} - in_z\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \tag{I.25}$$

Cette matrice est en fait une matrice *générale* à coefficients complexes de la forme :

$$U = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad \text{avec } \det U = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} = 1 \tag{I.26}$$

L'ensemble de ces matrices est le groupe $SU(2)$:

S : spécial $\Longleftrightarrow$ $\det U = +1$,

U : unitaire $\Longleftrightarrow$ $U^\dagger = U^{-1}$ $\quad (U^\dagger = {}^t\bar{U})$,

2 : matrice 2×2.

On appelle spineurs les objets à deux composantes qui engendrent la représentation $SU(2)$ du groupe des rotations, i.e. qui se transforment lors d'une rotation par (voir l'Appendice III) :

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \to z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U(\vec{\theta}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \tag{I\_27}$$

Il est important de comprendre que l'aspect spinoriel (ou vectoriel ou tensoriel) d'un doublet (respectivement d'un triplet ou d'un n-uplet) ne se manifeste que lorsqu'on effectue une rotation. Par exemple, n'importe quel triplet de nombres peut représenter les composantes d'un vecteur dans une base donnée : pour savoir s'il s'agit bien d'un vecteur, il faut le transformer dans une rotation. Il en va de même bien entendu pour un spineur qui peut être n'importe quel doublet de nombres complexes. Notons un fait remarquable : alors que les matrices de $SO(3)$ sont réelles, celles de $SU(2)$ sont en général à coefficients complexes. Ceci implique que si un observateur associe à une grandeur physique spinorielle un doublet (z_1, z_2) de nombres réels, un autre observateur tourné par rapport au premier, associera en général à la même grandeur un doublet (z'_1, z'_2) complexes. En d'autres termes, contrairement aux vecteurs, la condition de réalité des composantes d'un spineur n'est pas stable par rotation.

Et maintenant une question méta - physique. Pourquoi la physique classique n'emploie-t'elle pas de spineurs et pourquoi la mécanique quantique le fait elle? Sans prétendre que cela réponde entièrement à la question, on consultera à ce propos avec profit l'encadré IV, page 53.

Notre construction précédente nous assure par avance que les tables de multiplication de $SU(2)$ et $SO(3)$ sont identiques. Etablissons explicitement l'homomorphisme envoyant $SU(2)$ sur $SO(3)$.

C Construction de la relation SO(3) - SU(2)

Commençons par quelques remarques préliminaires :

• l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices M, 2×2, hermitiques ($M^\dagger = M$) et de trace nulle est isomorphe à $\mathbb{R}^3$. En effet, la paramétrisation générale d'une telle matrice est :

$$M = \begin{pmatrix} z & x - iy \\ x + iy & -z \end{pmatrix} \tag{I\_28}$$

avec x, y, z réels.

Rotations et spineurs

- **Groupe SO3 : 3 = matrices R(3x3) de dimension 3 à coeff. réels de Det = +1 :S= spécial), O = Orthogonal ($R^t=R^{-1}$)**

- En théorie des groupes on montre que les rotations spatiales en 3D quelconques forme un groupe <u>non abélien</u> (SO3) et peuvent être décrites comme un enchaînement de rotations infinitésimales (ce qui caractérise la <u>continuité</u> de la transformation) qui peuvent elles mêmes être décrites par une loi utilisant trois matrices (3x3) complexes J_i opérant sur des vecteurs 3D de composantes V_i.

$$J_x = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix} \qquad J_y = \begin{matrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} \qquad J_z = \begin{matrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

- La rotation (non triviale) autour d'un axe orienté **n** est alors définie par :

- $R(\theta, \mathbf{n}) = e^{i\boldsymbol{\theta}\mathbf{J}} = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}$

Les vecteurs en physique sont alors définis, non pas comme des éléments d'un espace vectoriel (structure linéaire) mais comme les objets qui engendrent le groupe des rotations spatiales.

Rotations et spineurs

- **L'ensemble des trois J_i obéissent à la loi de commutation,**
- $[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k$ *(avec $i^2 = -1$ et ϵ_{ijk} symbole Levi-Civita)*
- où $[J_i, J_j] = (J_i * J_j) - (J_j * J_i)$, où le symbole * désigne le produit matriciel :
- Avec :

$$J_x = J_1 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix} \qquad J_y = J_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} \qquad J_z = J_3 = \begin{matrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Par exemple pour i =1, j=2: $[J_1, J_2] = (J_1 * J_2) - (J_2 * J_1) = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{123} J_3 = iJ_3$

$$J_1 * J_2 = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix} * \begin{matrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$$J_2 * J_1 = \begin{matrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} * \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix} = \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

$(J_1 * J_2) - (J_2 * J_1) = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{123} J_3 = iJ_3$

- Groupe SU2, Spécial, Unitaire ($U^{\dagger} = U^{-1}$), de dimension 2, matrices (2x2)

  L'ensemble des trois J_i obéissent à la loi de commutation,

  $[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k$ *(avec $i^2 = -1$ et ϵ_{ijk} symbole Levi-Civita)*

  Ceci forme l'algèbre de Lie du groupe non abélien des rotations et le caractérise. Cette loi définit aussi ses constantes de structure $i\epsilon_{ijk}$

- Le groupe SU2 où les J_i sont des matrices complexes (2x2) est le groupe associé à la représentation de dimension 2 du groupe des rotations.
- Il se révèle être le recouvrement universel du groupe non abélien des rotations spatiales SO3 (Spécial, Orthogonal, 3D).
- Retour à l'état initial par rotation 4π.
- Les objets manipulés sont des spineurs ayant deux composantes à la différence du groupe SO3 qui manipule des vecteurs.

http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/09/29/24/PDF/DEA-TH-GROUPES-2efinal.pdf

- Groupe SU2, Spécial, Unitaire ($U^\dagger = U^{-1}$), de dimension 2, matrices (2x2)

  L'ensemble des trois J_i obéissent à la loi de commutation,

  $[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k$ *(avec $i^2 = -1$ et ϵ_{ijk} symbole Levi-Civita)*

  Ceci forme l'algèbre de Lie du groupe non abélien des rotations et le caractérise. Cette loi définit aussi ses constantes de structure $i\epsilon_{ijk}$

- Le groupe SU2 où les J_i sont des matrices complexes (2x2) est le groupe associé à la représentation de dimension 2 du groupe des rotations.
- Il se révèle être le recouvrement universel du groupe non abélien des rotations spatiales SO3 (Spécial, Orthogonal, 3D).
- Retour à l'état initial par rotation 4π.
- Les objets manipulés sont des spineurs ayant deux composantes à la différence du groupe SO3 qui manipule des vecteurs.

http://cel.archives-ouvertes.fr/docs/00/09/29/24/PDF/DEA-TH-GROUPES-2efinal.pdf