

Lagrangien métrique géodésique en relativité

En relativité, on rappelle que la métrique s'écrit : $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ eq. 1

L'équation géodésique correspondant (entre autres) à un extremum d'une ligne d'univers dont le paramètre affine noté p par la suite (paramètre proportionnel à la « longueur ») est donné par l'équation 1, cette équation permet de définir un lagrangien : $(L = \frac{1}{2} ds^2/dp^2)^1$

dont l'équation de Lagrange donnée par l'équation (5.21) ci-après. Ce sujet est proposé à titre d'exercice, par exemple dans le cours de Luc Blanchet:

<https://www2.iap.fr/users/blanchet/images/coursRG.pdf>

Chapitre 5- paragraphe D, commençant p.36 dont quelques extraits sont donnés ci-après.
Rappel de la définition des symboles de Christoffel

$$\Gamma_{\mu\nu}^\rho = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} [\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu}] . \quad (5.19)$$

Exercice. En utilisant l'expression (5.19) du symbole de Christoffel dans l'équation (5.8) prouver qu'une forme équivalente de l'équation des géodésiques est

$$\frac{d}{dp} \left(g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{1}{2} \partial_\mu g_{\nu\rho} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\rho}{dp} . \quad (5.20)$$

L'équation précédente est intéressante car elle se réécrit sous forme d'une équation de Lagrange, dans laquelle le paramètre affine p joue le rôle du temps,

$$\frac{d}{dp} \left(\frac{\partial L}{\partial(dx^\mu/dp)} \right) = \frac{\partial L}{\partial x^\mu} , \quad (5.21)$$

où L est ce qu'on appelle le *lagrangien géodésique* donné par

$$L \left(x, \frac{dx}{dp} \right) = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} = \frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dp} \right)^2 . \quad (5.22)$$

Comme on a pu réécrire L à l'aide de l'intervalle, on voit que les trajectoires solutions de l'équation des géodésiques sont bien les lignes géodésiques de l'espace-temps, c'est-à-dire les lignes extrêmaliçant la distance carrée entre les événements au sens de l'intervalle ds^2 . On peut en fait montrer que les géodésiques extrêmaliisent aussi la distance $ds = \sqrt{\pm ds^2}$.

Notons que l'on a pas besoin de connaître les symboles de Christoffel (5.19) pour écrire les équations des géodésiques sous la forme (5.20). Les équations (5.20) sont en général plus faciles à utiliser que les équations (5.8). Au contraire, les équations (5.20) permettent de *calculer* très simplement les Christoffels $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ par comparaison avec (5.8); nous verrons en Sec. XIC un exemple pratique de calcul des $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ grâce à l'équation des géodésiques.

¹ Dans d'autres documents. <https://einsteinrelativelyeasy.com/index.php/fr/relativite-generale/137-equation-des-geodesiques-derivee-du-principe-de-moindre-action>, on utilise « ds » la racine carrée pour le lagrangien. Notons que, comme ds^2 désigne un tenseur de variance 2 et non pas un carré, formellement, cela n'est pas une racine carrée mais un tenseur de variance 1 noté $\mathbf{g}_\mu$ dont ds^2 résulte par un produit tensoriel : $\mathbf{g}_\mu \cdot \mathbf{g}_\nu = g_{\mu\nu}$.

μ

L'équation de Lagrange (5.21) partiellement développée en (5.20) que nous développons encore.

$$\frac{1}{2} \left[\frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) \frac{dx^\nu}{dp} + \frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) \frac{dx^\mu}{dp} + g_{\mu\nu} \left(\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \frac{d^2x^\nu}{dp^2} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right] = 0 \quad (5.23)$$

Dans la suite nous utiliserons les propriétés suivantes : La métrique est **symétrique** par rapport à ses indices $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, et **un indice de sommation peut être renommé**, puisque c'est un paramètre intermédiaire qui disparaît à la fin. Ainsi, en utilisant ces propriétés, cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) &= \partial_\nu g_{\mu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \\ \frac{d}{dp}(g_{\mu\nu}) &= \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{dp} \end{aligned}$$

En insérant dans l'équation (5.23) et, sans modifier l'équation elle peut s'écrire :

$$\frac{1}{2} \left[g_{\mu\nu} \left(\frac{d^2x^\mu}{dp^2} + \frac{d^2x^\nu}{dp^2} \right) + \left(\partial_\nu g_{\mu\lambda} \frac{dx^\nu}{dp} \frac{dx^\mu}{dp} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} \frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) - \partial_\lambda g_{\mu\nu} \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right] = 0$$

Montrons que cette expression est équivalente à l'équation géodésique (5.24), où $\Gamma_{\mu\nu}^\rho$ est le symbole de Christoffel, qui s'écrit :

$$\frac{d^2x^\rho}{dp^2} + \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} [\partial_\mu g_{\nu\lambda} + \partial_\nu g_{\mu\lambda} - \partial_\lambda g_{\mu\nu}] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{d^2x^\rho}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0 \quad (5.24)$$

Il ne reste plus qu'à multiplier par la métrique inverse et effectuer pour faire disparaître la métrique, en facteur avec les dérivées secondes.

$$g^{\rho\lambda} \left[g_{\rho\sigma} \left(\frac{d^2x^\rho}{dp^2} \right) + \frac{1}{2} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) \right] = 0$$

$$\delta_\sigma^\lambda \left(\frac{d^2x^\rho}{dp^2} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\nu\lambda}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0$$

Ce qui peut s'écrire:

$$\left(\frac{d^2x^\rho}{dp^2} \right) + \frac{1}{2} g^{\rho\lambda} [(\partial_\nu g_{\mu\lambda} + \partial_\mu g_{\lambda\nu}) - (\partial_\lambda g_{\mu\nu})] \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = \frac{d^2x^\rho}{dp^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\rho \left(\frac{dx^\mu}{dp} \frac{dx^\nu}{dp} \right) = 0$$

Pour $\lambda = \sigma$, l'équation ci-dessous est bien l'équation géodésique (5.24). Comme σ n'est pas utilisé dans l'équation, on peut le poser égal à λ sans que cela soit une contrainte dans l'équation.

Par ailleurs cela introduit directement l'équation de la dérivée covariante avec le symbole de Christoffel.