



1950- 1960: La nature des trous noirs enfin révélée

Cours SAF 2018: Par Jacques Fric

Le creux de vague 1933-1949

- ▶ En 1938, Robertson, montre explicitement qu'on peut traverser l'horizon
- ▶ En 1939, Einstein dans une tentative désespérée pour prouver qu'un trou noir ne peut pas se former par « effondrement » de matière publie un article où il prétend le démontrer.
- ▶ *Einstein, A. (1939). Stationnary system with spherical symetry consisting of many gravitating masses. Ann. Math. 40 : 922-936.*
- ▶ Einstein tire une conclusion erronée d'un calcul correct. Il considère un système à symétrie sphérique, formé d'un grand nombre de particules, chacune tournant sur une orbite déterminée par la masse « intérieure ». Il calcule la vitesse en fonction de l'orbite et montre que la vitesse de la lumière est atteinte à l'extérieur de l'horizon défini par la masse « intérieure » (à $3GM/c^2$, qui correspond à la sphère des photons).

Le creux de vague 1933-1949

- ▶ Il en déduit (à tort) qu'un trou noir ne peut donc pas exister. En fait, d'une part il ne traite pas le problème général et d'autre part, il ne peut que déduire qu'il n'y a pas d'orbite stationnaire possible en dessous d'un certain rayon ($3GM/c^2 > 2GM/c^2$).
- ▶ En 1939, Snyder et Oppenheimer démontrent au contraire qu'une boule de matière sans pression peut s'effondrer en « trou noir ». C'est le prélude à l'étude de la singularité centrale.
- ▶ *Oppenheimer J.R, & Snyder H. (1939). On continued gravitationnal contraction. Phys. Rev. 56: 455-459*

1950: La solution de Synge

- ▶ Dans un article remis en avril 1949 mais seulement publié en mars 1950, Synge propose la première forme montrant l'existence non pas de deux régions mais de 4 régions (deux autres, symétriques des deux premières).
- ▶ Sa démarche, peu connue, n'est pas triviale et mérite qu'on s'y attarde un peu.
- ▶ Il commence par souligner que s'il existe une solution à ce type de problème et que plusieurs formes de la métrique ont été proposées pour la décrire, en particulier celles de Schwarzschild et de Lemaître, la structure de l'espace temps qu'elles représentent reste bien obscure et qu'en réalité, on sait bien peu de choses à ce sujet.
- ▶ *Synge J.L (1950). « The gravitationnal field of a particle ». Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114*



Celle de Schwarzschild a le mérite de bien mettre en évidence la symétrie sphérique spatiale et le caractère statique de la région extérieure mais ne permet pas de voir que l'horizon est une singularité fictive et qu'on peut le traverser, celle de Lemaître n'a pas ces propriétés mais par contre elle a le mérite de montrer que la singularité à $r = r_s$ est fictive, donc qu'un observateur peut en théorie traverser l'horizon et qu'il faut bien considérer la région « intérieure » comme « physique ».

Mais tout cela est bien maigre, selon lui!

Après cette sensibilisation, il prend résolument une approche de mathématicien plutôt que de physicien, ce qui va le servir d'un côté et le desservir d'un autre comme nous allons le voir.



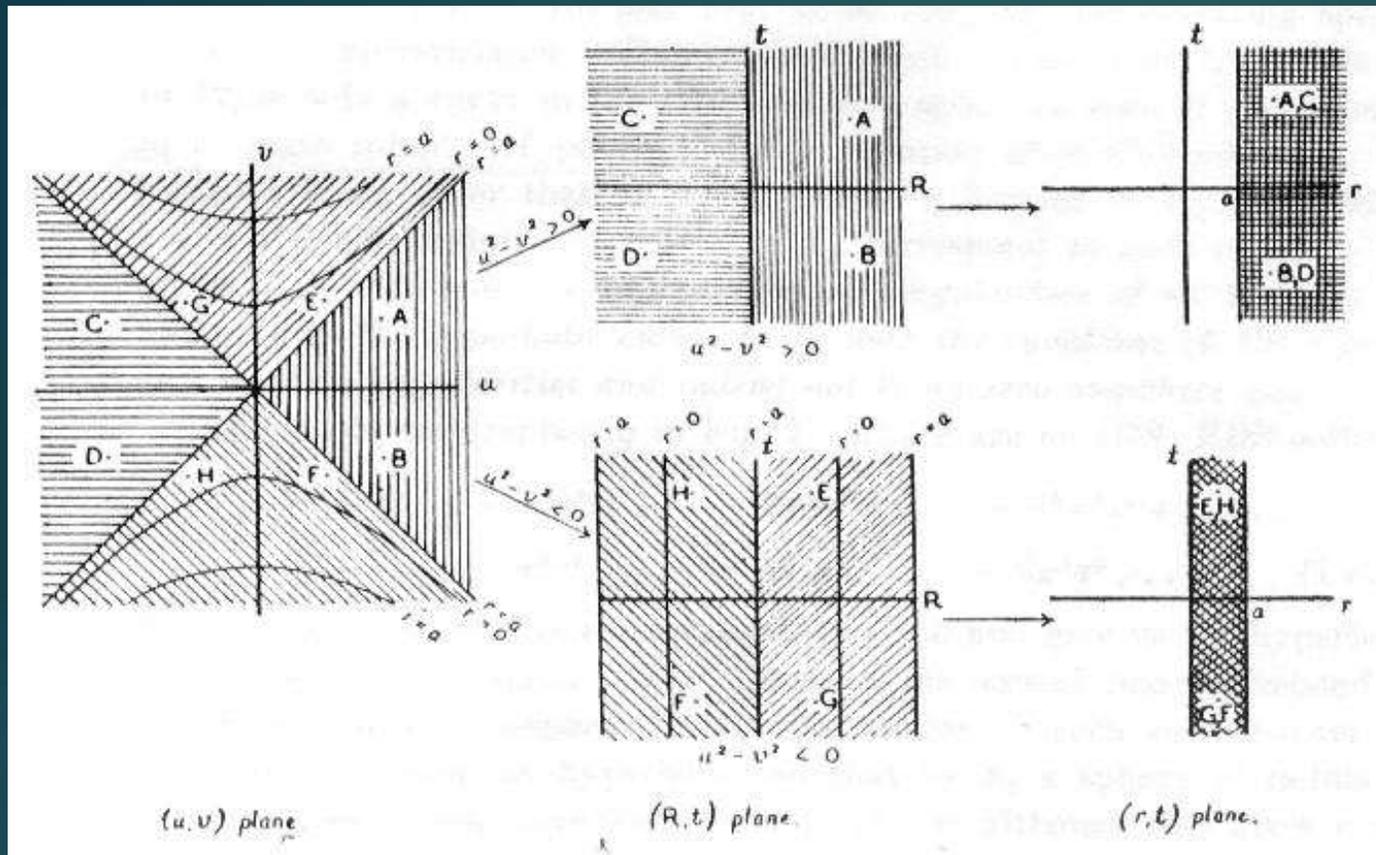
► Il introduit des variables cartésiennes u et v variant de $-\infty$ à $+\infty$ qui définissent un plan complet. Il va construire des fonctions, non pas de u et v directement, mais de $(u^2 - v^2)$ qu'il va utiliser dans l'élaboration de sa nouvelle forme de la métrique. Il commence par définir la forme d'une certaine fonction :

$$► Y = a^2 X [1 + (\sum_0^\infty X^m / (2m+1)!) (\sum_0^\infty X^n / 2n !)]^2$$

► Les coordonnées u, v vont se substituer aux coordonnées t, r (qui en deviennent des fonctions) de la forme de Schwarzschild, qui définissaient un demi plan ($r > 0$). D'où l'extension. On conserve en général r (alors fonction de u, v) dans la partie à symétrie sphérique. Suit une partie calculatoire assez technique et à leur issue, Synge propose une forme de la métrique dans ses coordonnées.

$$► ds^2 = du^2 - dv^2 + (v \cdot du - u \cdot dv)^2 F + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \cdot d\phi^2)$$

► Où F et r sont des fonction de $(u^2 - v^2)$.



Liens entre les régions des différentes représentations

L'analyse dans le plan u, v fait bien apparaître que les courbes à $r = \text{constante}$, correspondant à $u^2 - v^2 = \text{constante}$, sont des hyperboles dont les asymptotes communes (définies par $u^2 - v^2 = 0$) délimitent quatre régions qu'on appellera, conformément à la figure ci dessus:

$$\text{I} = (A+B), \text{II} = (E+G), \text{III} = (F+H), \text{IV} = (C+D).$$



Les asymptotes correspondant à $u^2 - v^2 = 0$ définissent bien l'horizon, tel qu'il est défini dans la forme de Schwarzschild, puisque pour $u^2 - v^2 = 0$, la fonction $r(u^2 - v^2)$ vaut r_s .

Pour les régions **II** et **III**, nous n'avons considéré que la partie entre les asymptotes et l'hyperbole $r = 0$. En fait la solution de Synge définit une infinité d'autres régions entre les infinités d'hyperboles $r = 0$ et $r = r_s$. Ces sous régions apparaissent comme un artéfact lié à la fonction $r(u^2 - v^2)$ qu'il a définie et qui est pseudo périodique pour $r < r_s$.

Les hyperboles représentant les singularités à $r = 0$ sont bien de type espace (leur métrique est dégénérée).



Cette contribution est passée inaperçue à l'époque, Synge n'ayant pas perçu l'intérêt de sa contribution, qui même si elle comportait quelques erreurs introduisait explicitement les 4 régions, que Kruskal et quelques autres retrouveront plus de 10 ans plus tard, dans un système de coordonnées unique. Par contre Synge pensait qu'on pouvait traverser la singularité centrale, ce qui n'est pas l'hypothèse généralement retenue,, ce qui fait qu'une particule était piégée et condamnée à faire des aller-retours éternellement entre horizons et la singularité centrale.

Lui- même présenta modestement sa contribution comme pouvant aider à comprendre la nature des trous noirs.

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ La démarche utilisée par Finkelstein est intéressante et diffère notablement de la façon dont ces coordonnées sont introduites trivialement aujourd'hui.
- ▶ Finkelstein ne part pas de la forme de Schwarzschild, et ne procède pas à un changement de coordonnées pour obtenir sa solution. Comme il cherche l'extension maximum de la variété, il reprend le problème ex nihilo, et cherche en fait une forme, en coordonnées cartésiennes décrivant une variété possédant un certain nombre de propriétés caractéristiques, satisfaisant à huit conditions selon lui.
- ▶ *a*) doit être relativiste dans le vide : satisfaire l'équation d'Einstein dans le vide.
- ▶ *b*) doit être invariante par translation dans le temps.

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ *c*) doit être invariant par les rotations spatiales.
- ▶ *d*) doit converger asymptotiquement vers la métrique de Minkowski
- ▶ *e*) doit considérer que $x^i = 0$ (x^i sont les coordonnées spatiales) est une « vraie » singularité.
- ▶ *f*) invariant par le groupe discret de symétrie spatiales : $x^i \rightarrow x'^i = -x^i$, $x^0 \rightarrow x'^0 = x^0$
- ▶ *g*) invariant par le groupe discret de symétrie temporel : $x^0 \rightarrow x'^0 = -x^0$, $x^i \rightarrow x'^i = x^i$
- ▶ *h*) x^0 doit de type temps partout $\rightarrow g_{00} > 0$ dans toute la variété

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ En les analysant, il arrive à la conclusion que les conditions *a-e* suffisent à elles seules pour définir totalement un $g_{\mu\nu}$ analytique qui satisfait *f* mais ni *g* ni *h*.
- ▶ Il souligne l'asymétrie temporelle (passé \leftrightarrow futur) des solutions, dans le cas du champ créé par une particule ponctuelle et ceci en dépit de la symétrie temporelle de l'équation d'Einstein, ce qui le surprend. Il déclare :
- ▶ « Il semble que l'invariance par renversement du temps en Relativité Générale ne s'applique pas au cas du champ d'une particule ponctuelle de masse positive sphérique. Bien que les conditions *a-e* ne distinguent pas entre passé et futur, le seul univers qui les satisfasse fait cette distinction.

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ Comment des causes symétriques peuvent produire des effets qui ne le sont pas ?
- ▶ Une telle violation du principe de raison suffisante doit être attribué à la nature non linéaire de la gravitation »
- ▶ Après avoir fait remarquer que la solution de Einstein Rosen pour le champ crée par une particule apparaît plutôt comme un rapiécage d'espaces extérieurs que comme une variété, puisque, entre autres, elle est singulière à la couture, il va rechercher dans une voie différente.
- ▶ L'asymétrie qu'il relevé, va le conduire à définir deux formes, une pour chaque « sens » du temps, en considérant que chaque forme, qui diffère de l'autre par le signe du produit croisé, décrit de façon complète une variété.

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ Le fait que l'horizon se comporte comme une membrane unidirectionnelle dans un sens pour une solution (on traverse l'horizon dans le sens du futur) et dans l'autre pour l'autre solution (on traverse l'horizon dans le sens du passé) le conforte dans son analyse d'asymétrie temporelle.
- ▶ Il considère donc qu'il y a deux variétés différentes, correspondant à deux extensions différentes de la région « extérieure » à l'horizon et se demande sur quel critère on est dans une plutôt que dans l'autre. Il attribue cela à une instabilité, liée aux phénomènes non linéaires
- ▶ C'est de ces considérations seulement, sans faire référence à priori à la forme de Schwarzschild, qu'il va déduire ses formes (il pose $r_s = 1$, $r = (\mathbf{x}^i \cdot \mathbf{x}^i)^{1/2}$ $dr = \mathbf{x}^i \cdot d\mathbf{x}^i / r$)

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ Les deux formes s'écrivent:
- ▶ $ds^2 = (1 - 1/r)(dx^0)^2 \pm 2(dx^0 \cdot dr)/r - (1 + 1/r)dr^2 - (dx^i \cdot dx^i - dr^2)$
- ▶ qu'on trouve aujourd'hui en coordonnées sphériques plutôt écrite comme cela :
- ▶ $ds^2 = -(1 - a/r)dv^2 \pm (dv \cdot dr + dr \cdot dv) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta \cdot d\phi^2)$
- ▶ L'une correspond à une géodésique radiale nulle entrante vers l'horizon (partie en effondrement), l'autre à une géodésique nulle sortante (partie en expansion).
- ▶ Comme dans la forme de Painlevé dont elle est l'équivalent pour les géodésiques nulles les cônes de lumière basculent de façon à permettre le franchissement de l'horizon dans les deux cas.

1958: Finkelstein redécouvre les coordonnées d'Eddington

- ▶ Ces coordonnées effacent bien la singularité de coordonnées à $r = r_s$, mais il lui faut deux référentiels (coordonnées avancées et retardés) pour couvrir 3 régions : a) couvre les régions *I* et *II*, et b) couvre les régions *I* et *III*. La région *IV* n'est pas couverte.
- ▶ Finkelstein contribue à ouvrir la voie à la solution complète, mais son article montre que, encore en 1958, les idées ne sont pas très claires. En effet, Finkelstein considère encore que les deux formes qu'il a établies décrivent deux variétés différentes du fait de l'asymétrie temporelle qu'il n'arrive pas à interpréter correctement et que chacune des formes représente l'extension analytique maximum de la variété correspondante.
- ▶ Comme nous l'avons noté, Synge, en précurseur, était allé plus loin sur ce point.

1960: Solution de Kruskal

► La méthode et les résultats de Kruskal

► En 1960, dans un article

► très court d'une limpidité exemplaire, Kruskal décrit les 4 régions dans un seul système de coordonnées².

► Il explique clairement son objectif : trouver une forme de la métrique, explicitement à symétrie sphérique dans laquelle les cônes de lumière en tout point ont une pente de ± 1 ($dx^1/dx = \pm 1$), de la forme :

► $ds^2 = f^2(r)(-dv^2 + du^2) + r^2.d\omega^2$

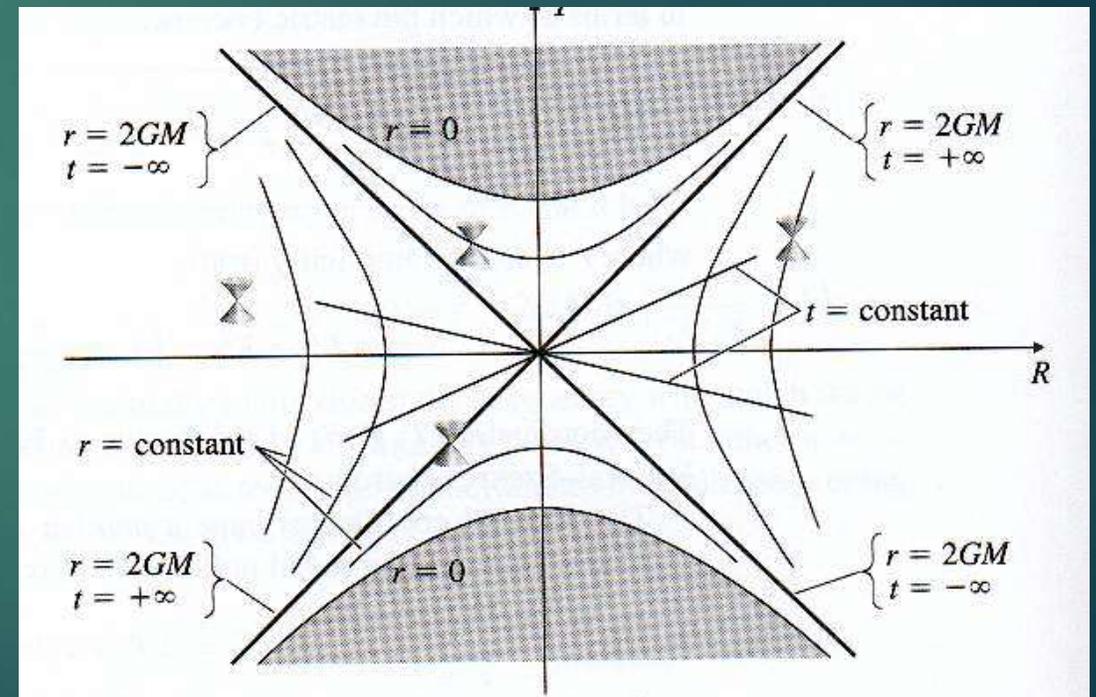
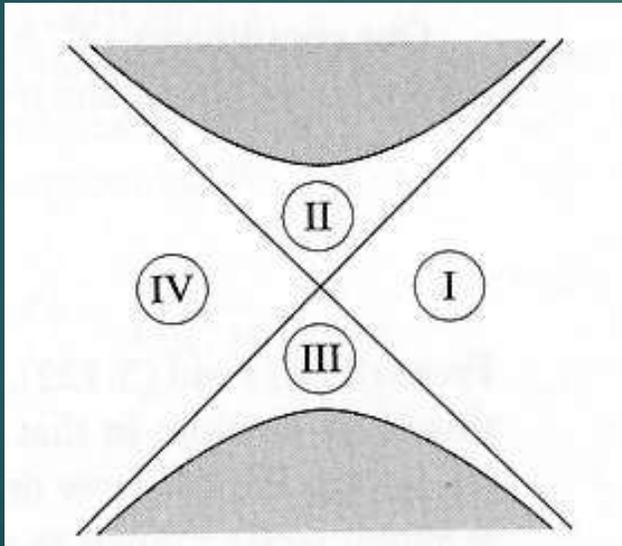
► Où f est une fonction qui ne dépend que de r , qui doit rester finie et non nulle pour $u = v = 0$. Il va la déterminer en cherchant une transformation qui va permettre d'identifier cette forme avec celle originale de Schwarzschild.

► Kruskal M. D. (1960). Maximal extension of Schwarzschild metric. Phys.Rev. 119 : p 1743-1745.

► Les équations de transformation conduisent à une solution unique entre le quadrant $u > |v|$ et la région définie par $r > 2GM/c^2$ dans la solution de Schwarzschild. Les relations directes, en rappelant qu'on pose $r_s = 2GM/c^2$, sont :

► $u = [(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) \cosh(t/2r_s)$

► $v = [(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) \sinh(t/2r_s)$



Les quatre régions définies par la forme de Kruskal-Diagramme générique de la forme de Kruskal

Les relations inverses sont :

$$[(r/r_s) - 1]^{1/2} \exp(r/2r_s) = u^2 - v^2 \text{ pour } r(u, v)$$

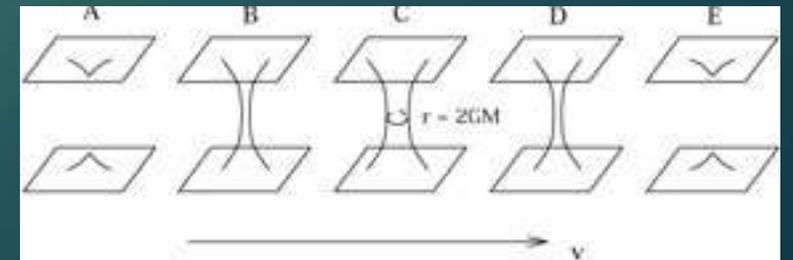
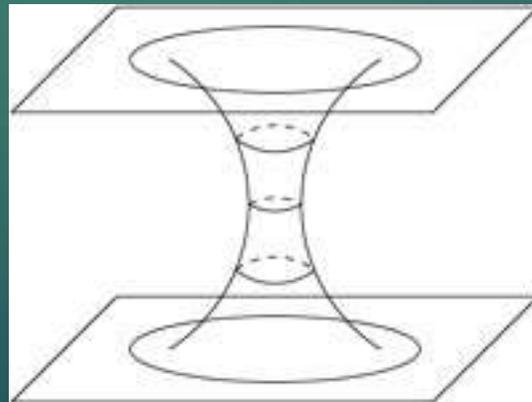
$$t/2r_s = \operatorname{arctanh}(v/u) = 1/2 \operatorname{arctanh}[2uv/(u^2 + v^2)] \text{ pour } t(u, v)$$

Relations qui sont manifestement invariantes par les transformations directes du fait de la symétrie par rapport à u , v de la deuxième et de la parité des inversions de signe dans la première, ce qu'on peut vérifier simplement.

Il démontre que cela correspond bien à l'extension maximum, en entendant les géodésiques de tout type (temporelles, nulles, spatiales) dans les deux directions.

Il met en évidence la topologie spatiale de l'extension maximum (deux régions asymptotiquement euclidiennes connectées par un pont de Rosen Einstein ou un trou de ver).

Topologie et développement
Des trous de ver ci-contre



Kruskal s'est-il inspiré de Synge entre autres ?

- ▶ Kruskal cite explicitement Kasner (1921b), Lemaître (1933), Einstein et Rosen (1935) Robertson (1939), **Synge (1950)**, Ehlers, Finkelstein(1958) et **Fronsdal, (1959)** comme ayant contribué à la démonstration que les singularités à $r = 0$ et $r = r_s$ sont de nature différentes. Pour Fronsdal et Synge, c'est un doux euphémisme, puisque Fronsdal vient juste de mettre en évidence par une approche différente que l'extension maximum comporte bien quatre régions, et que dix ans auparavant de façon moins claire mais toutefois indiscutable Synge est arrivé à la même conclusion.
- ▶ Il est assez surprenant que Kruskal ne mentionne pas les travaux de Synge de façon plus précise, car les représentations et les transformations utilisées sont très proches. Ces transformations sont de la forme :
 - ▶ $u = g(r)\cosh(t/2 r_s), v = g(r)\sinh(t/2 r_s)$

L'apport de Kruskal

- ▶ Par rapport à Synge et indépendamment du fait qu'il s'en soit inspiré ou non, Kruskal présente une vision très claire et explicite de l'extension aux quatre régions. Il prouve qu'elle est maximum, il décrit la connexion par un pont d'Einstein Rosen ou un trou ver entre les deux espaces symétriques asymptotiquement plats, en indiquant que ce pont ou trou de ver, par son caractère dynamique, ne permet pas aux signaux lumineux (et encore moins aux particules matérielles) de le traverser.
- ▶ 1960 Szekeres, indépendamment, fait la même découverte
- ▶ Szekeres utilise une partie des résultats établis 10 ans plus tôt par Synge à savoir les transformations : $u = h(r).cosh(t/2r_s)$, $v = h(r).sinh(t/2r_s)$. Simplement il va choisir une fonction $h(r)$ différente de $g(r)$ utilisée de Synge, pour aboutir à la même forme que celle de Kruskal
- ▶ Szekeres G. (1960). On the singularities of a Riemannien manifold. Publ. Mat. Debrecen 7, 285-301.

1963- *Forme de Novikov*

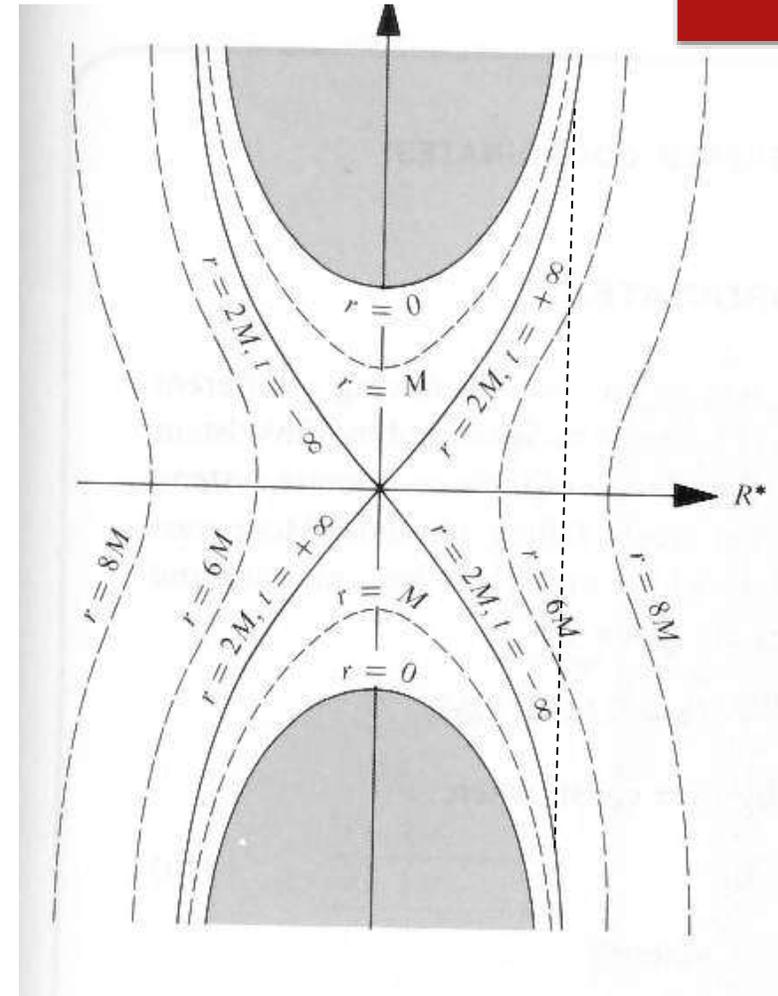
- ▶ Elaborée pour représenter clairement le mouvement radial géodésique de particules dans ce champ central, cette forme possède les propriétés suivantes.¹
- ▶ - Le référentiel associé à cette forme est synchrone. Il est possible de synchroniser les horloges dans ce référentiel.
- ▶ - Il est comobile. Les particules en chute libre sont « au repos » dans ce référentiel.
- ▶ - La forme de la métrique dans le vide comporte une région spatio-temporelle qui se contracte, une autre qui se dilate.

▶ ¹ Gravitation, C.W Misner, K. Thorne, J.A Wheeler Freeman p. 826-827

- 
- ▶ Novikov associe à chaque particule une valeur de coordonnée radiale R^* quand elle émerge de la singularité (à $r = 0$) et indique que la particule va conserver cette valeur tout au long de sa « vie cycloïdale » de $r = 0$ à r_{max} via $r = r_s$ pour la phase de dilatation puis de r_{max} à $r = 0$, via $r = r_s$ pour la phase de contraction. A cet effet Novikov attribue pour chaque particule une valeur R^* qui dépend du r_{max} de sa trajectoire.
 - ▶ $R^* = (r_{max}/r_s - 1)^{1/2}$.
 - ▶ Comme coordonnée de temps, Novikov utilise le temps propre τ de la particule de test avec $\tau = 0$ au sommet de l'orbite pour $r = r_{max}$ en ajustant les coordonnées entre référentiels de sorte que dans la forme de Schwarzschild on ait aussi $t = 0$ quand la particule est en ce point.

- 
- ▶ Novikov associe à chaque particule une valeur de coordonnée radiale R^* quand elle émerge de la singularité (à $r = 0$) et indique que la particule va conserver cette valeur tout au long de sa « vie cycloïdale » de $r = 0$ à r_{max} via $r = r_s$ pour la phase de dilatation puis de r_{max} à $r = 0$, via $r = r_s$ pour la phase de contraction. A cet effet Novikov attribue pour chaque particule une valeur R^* qui dépend du r_{max} de sa trajectoire.
 - ▶ $R^* = (r_{max}/r_s - 1)^{1/2}$.
 - ▶ Comme coordonnée de temps, Novikov utilise le temps propre τ de la particule de test avec $\tau = 0$ au sommet de l'orbite pour $r = r_{max}$ en ajustant les coordonnées entre référentiels de sorte que dans la forme de Schwarzschild on ait aussi $t = 0$ quand la particule est en ce point.

- ▶ On constate un petit air de famille avec la représentation en coordonnées de Kruskal.
- ▶ Les lignes d'univers des particules sont des segments de droite verticaux, comme celui représenté en trait interrompu épais.
- ▶ La particule émerge de $r = 0$ en bas, elle perce l'horizon (courbe à $r = 2M$) puis s'éloigne dans l'espace extérieur, atteint son maximum R^* à $\tau = 0$ et replonge vers l'horizon qu'elle traverse pour aboutir à $r = 0$ en haut.



Faisons le point sur ces solutions

- ▶ A l'aube des années 60, on était en droit de se demander pourquoi la première forme donnée par Schwarzschild rapidement étendue par Droste, si elle propose une solution extérieure très générale (théorème de Birkoff) en particulier valable pour les objets célestes classiques comme les étoiles et planètes entre autres, ne révèle pas l'extension maximale de la solution dans le cas d'un trou noir.
- ▶ C'est probablement lié à l'approche formelle adoptée. Une solution à topologie et symétrie spatiale globalement sphérique a été recherchée ce qui n'a permis que de trouver une partie de la solution. La topologie spatiale globale de l'extension maximale est celle de deux espaces à symétrie sphérique connectés par un pont.
- ▶ Le théorème de Birkhoff nous garantit que la métrique de Schwarzschild est la seule solution de la relativité générale, dans le vide, pour une distribution de matière à symétrie sphérique. Ceci ne devrait pas nous surprendre, si nous nous rappelons que la configuration équivalente en électromagnétisme, symétrie sphérique et région sans charges, est un champ de Coulomb.

Faisons le point sur ces solutions

- ▶ A l'aube des années 60, on était en droit de se demander pourquoi la première forme donnée par Schwarzschild rapidement étendue par Droste, si elle propose une solution extérieure très générale (théorème de Birkoff) en particulier valable pour les objets célestes classiques comme les étoiles et planètes entre autres, ne révèle pas l'extension maximale de la solution dans le cas d'un trou noir.
- ▶ C'est probablement lié à l'approche formelle adoptée. Une solution à topologie et symétrie spatiale globalement sphérique a été recherchée ce qui n'a permis que de trouver une partie de la solution. La topologie spatiale globale de l'extension maximale est celle de deux espaces à symétrie sphérique connectés par un pont.
- ▶ Le théorème de Birkhoff nous garantit que la métrique de Schwarzschild est la seule solution de la relativité générale, dans le vide, pour une distribution de matière à symétrie sphérique. Ceci ne devrait pas nous surprendre, si nous nous rappelons que la configuration équivalente en électromagnétisme, symétrie sphérique et région sans charges, est un champ de Coulomb.

Les singularités sont bien embarrassantes

- ▶ Dans le contexte de l'époque, la découverte de cette solution, même partielle, exhibant des singularités mettait dans l'embarras les relativistes les plus éminents (et il n'y en avait pas tant que cela à l'époque). La théorie à peine élaborée, on découvrait qu'elle prédisait des horreurs. Les scientifiques, Einstein en tête se trouvaient face à une situation inconnue et ils craignaient sans doute que cela ne mette en cause la viabilité de la théorie encore naissante.
- ▶ Face à cela ils ont décrété un embargo intellectuel vis-à-vis des trous noirs, s'appuyant sur le fait qu'il s'agissait de situations extrêmes qui ne pouvaient pas se produire dans la nature, d'ailleurs tous les objets physiques qu'on connaissait qui pourraient relever de cette solution (étoiles, planètes en particulier) étaient très loin de cette situation.

- ▶ Il y avait donc plus urgent à faire que de chercher à approfondir l'analyse et tenter de résoudre cette énigme sulfureuse, d'autant que l'application de la relativité générale en cosmologie commençait à porter ses fruits.
- ▶ Cet enthousiasme pour la diversion cosmologique allait tout de même prendre rapidement un petit coup de froid avec la solution de De Sitter (1918)¹ qui présentait également une singularité (l'horizon de masse) à une distance finie, De Sitter sauvant les meubles en déclarant que l'absence de singularité à distance finie postulée par Einstein devait se s'entendre comme un principe philosophique métaphysique et qu'il fallait lire : « Absence de singularité à une distance physiquement accessible ».²
- ▶ La solution était déroutante d'une part parce que c'était une solution « dans le vide », en contradiction avec le principe de Mach cher à Einstein et d'autre part il y avait une singularité (qui s'est révélée être de coordonnées).
- ▶ ² De Sitter W. (1918). Further remarks on the solution of Einstein's theory of gravitation. Proc R. Aad, Amsterdam 20, 1309

- 
- ▶ Avec un tel handicap pour l'étude des trous noirs, pas étonnant alors que le parcours ait été laborieux, comme le texte qui précède l'a montré. Il n'est pas exagéré de dire que le voile ne s'est soulevé que peu à peu et que compte tenu des horreurs qu'on découvrait on hésitait souvent à le soulever davantage.¹
 - ▶ D'un point de vue physique, c'était encore plus douloureux car c'était la première fois qu'on se confrontait à un type de situation où on trouvait deux singularités.
 - ▶ Il a fallu déjà comprendre qu'elles n'étaient pas de même nature.

L'horizon

- ▶ Celle à $r = r_s$ peut être effacée par un changement de coordonnées, et ne correspond pas à une singularité géométrique de la variété représentant l'espace temps associé à cette solution (elle n'a pas le caractère physique d'une singularité, les grandeurs physiques ne deviennent pas infinies en ce point).
- ▶ Le fait que l'horizon ne soit pas une singularité a mis du temps à s'imposer. En 1957, Regge et Wheeler ¹ considèrent encore dans l'article référencé que l'horizon est une singularité.
- ▶ Pour autant, même s'il n'est pas une singularité, l'horizon est une caractéristique intrinsèque de la solution.
- ▶ ¹. T. Regge et J. A. Wheeler (1957). Stability of a Schwarzschild Singularity. Phys.Rev. Vol 108, N 4 p 1063-1069

- 
- ▶ On a déjà vu que la description des géodésiques « radiales » entrantes dans la solution de Schwarzschild nécessite deux référentiels, qu'il faut bien entendu raccorder « sans couture » avec gestion des recouvrements éventuels.
 - ▶ Même si les coordonnées n'ont en elles mêmes aucun caractère physique et ne servent qu'à cartographier la variété (étiqueter tous ses points), la nécessité de deux référentiels dans la solution de Schwarzschild est symptomatique de la présence de deux régions qui ici sont assez différentes.



- ▶ En effet si l'horizon n'est pas une singularité vraie telle que nous l'avons définie, pour autant il joue un rôle physique important. A l'extérieur de l'horizon, l'espace temps est statique, sous l'horizon l'espace temps n'est plus statique du tout,¹ ce qui est caractéristique de propriétés géométriques intrinsèques de la solution, indépendantes du référentiel utilisé et de la forme de la métrique associée.
- ▶ ¹ En effet, si la région extérieure à un trou noir est bien stationnaire au sens usuel (c'est-à-dire admet un groupe d'invariance de la métrique correspondant à des translations " dans le temps "), la région intérieure, quant à elle, admet (par prolongement) un groupe d'invariance de la métrique, mais ce groupe y correspond maintenant à des translations " dans l'espace " (ce qui veut dire que la région intérieure est homogène mais non stationnaire). Ce changement profond de caractère de la symétrie temporelle de l'espace-temps à la traversée de l'hypersurface $r=2GM/c^2$ et le fait que cette dernière est une membrane unidirectionnelle que l'on ne peut traverser que dans un sens, a été d'abord clairement reconnu à la fin des années 1950, grâce notamment aux travaux de David Finkelstein, Christian Fronsdal et Martin Kruskal, sur le cas particulier de la métrique dont la forme extérieure a été trouvée par Karl Schwarzschild dès 1916 : Adapté de: T. Damour , relativité, Encycl. Universalis 1990

On aurait en effet pu objecter, avec raison, que dans d'autres coordonnées (Kruskal par exemple) un seul référentiel est utilisé pour décrire la solution complète, et que l'argument des deux référentiels dans la forme de Schwarzschild qui a révélé cet horizon est mis en défaut, car lié à un système de coordonnées particulier. C'est un point un peu subtil de la théorie qui effectivement définit l'horizon dans un référentiel associé à un observateur à l'infini¹, horizon qui va toutefois avoir le caractère intrinsèque (indépendant du référentiel) de délimiter deux régions différentes et qui va couper le lien causal vers l'extérieur.

¹ A noter que la masse du trou noir est aussi définie de cette manière par l'intégrale de Komar par exemple, ce qui est cohérent puisque c'est ce seul paramètre qui définit intégralement le trou noir, en particulier la surface de l'horizon qui va être associée à son entropie

- 
- ▶ Comme il est en relation avec la singularité centrale (conjecture de censure cosmique) on pourrait penser que l'étude de la vraie singularité et celle de l'horizon associé vont de pair.
 - ▶ C'est le cas, la notion de surface piégée étant intimement liée à celle de singularité mais il y a des spécificités importantes à l'étude de chacun de ces cas.

La singularité centrale

- ▶ L'autre singularité, en $r = 0$, qui correspond à une divergence de la courbure pose un problème de principe, qui a encore mis mal à l'aise les relativistes puisqu'elle semble entacher la Relativité Générale d'un péché originel qui fait qu'elle contiendrait sa propre perte. Dans le cas du trou noir, $r = 0$ correspond à la fin du temps. On verra que précisément ce qui caractérise ce type de singularité c'est l'existence de géodésiques incomplètes (qui ne s'étendent pas indéfiniment dans chaque direction). Cela va nous révéler des propriétés bien étranges. Au début des années 1960, la structure des trous noirs de Schwarzschild étant mieux comprise, en particulier ses « singularités » ayant été mises en évidence, il était naturel de s'interroger sur leur nature physique et sur la raison de leur présence.
- ▶ C'est ce qui a été entrepris dans le courant de la décennie qui a suivi.

1965-1975- Nature physique et implication des singularités- Rappel de la situation

- ▶ Les singularités de la forme décrivant la métrique sont apparues dès les premières solutions « exactes » de la Relativité générale (1916). Comme cela a été dit avant, on ne peut pas dire que cela ait réjoui les relativistes de l'époque qui y voyaient là comme une marque d'infamie portée sur cette toute nouvelle théorie.
- ▶ Pour ce qui concerne la solution de Schwarzschild, Painlevé trouve en 1921 une solution qui élimine une des deux singularités de la métrique, ce qui laissait à penser que ces deux singularités étaient de nature différente, conclusion qu'il n'a pas tirée directement, convaincu qu'il était que c'était une solution différente du problème du corps central à symétrie sphérique, comme sa polémique avec Einstein en témoigne.



► Lemaître va un peu plus loin en établissant une autre forme, et reconnaissant que la singularité à $r = r_s$ est bien une singularité fictive, mais tout cela restait assez formel. Ce sont les remarques de Robertson (1938) et la publication de Oppenheimer Snyder¹ (1939) qui vont conférer un caractère physique à cette singularité, le premier en montrant qu'un observateur peut traverser l'horizon et les seconds en montrant (sous des hypothèses simplificatrices, mais qui se sont révélées justifiées) qu'une boule de poussière pouvait s'effondrer « indéfiniment » sous l'action du champ créé par sa propre matière. Les choses devenaient sérieuses. La deuxième guerre mondiale et la course au nucléaire qui suivit allaient mobiliser le fleuron de la recherche pendant quelque temps et geler cet élan.

► ¹ Oppenheimer J.R, Snyder H.(1939). On continued gravitational contraction. Phys. Rev. Vol 56, p 455-459



Etude des congruences

- ▶ Le sujet est relancé en 1955, quand on commence à développer d'autres méthodes d'approche des solutions en relativité générale. Jusqu'à présent, on s'intéressait à la description de la Variété représentant l'espace temps par ses points (définis par leurs coordonnées). Il est apparu plus judicieux et structurel de considérer la variété générée par des courbes, en particulier par les géodésiques qui y sont définies.
- ▶ Est apparu ainsi la notion de congruence. On définit des familles de géodésiques qui « remplissent et génèrent » tout l'espace-temps, ce qui fait que les points précédemment définis par les coordonnées vont se trouver maintenant définies comme appartenant à une géodésique. L'intérêt de cette description c'est que si on regarde ce qui se passe localement en considérant un faisceau de géodésiques voisines d'une géodésique particulière que l'on prend comme référence, cela donne une allure de la structure de l'espace temps local

Etude des congruences

- ▶ On prend par exemple une section spatiale (orthogonale) circulaire en un point et on regarde comment évolue cette section quand on progresse dans une direction le long de la géodésique de référence. La section circulaire peut varier en taille, en restant circulaire, elle peut varier en forme (devenir une ellipse par exemple) et elle peut « tourner ». Pour quantifier cela, on se sert d'un résultat géométrique bien connu qui est l'équation de déviation géodésique, dont on prend la trace. On obtient alors l'équation de Raychaudhuri¹ :
- ▶ $d\theta/d\tau = -\theta^2/3 - \sigma_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} + \omega_{\mu\nu}\omega^{\mu\nu} - R_{\mu\nu}U^\mu U^\nu$ (6-2-1), Où
- ▶ θ est un scalaire qui représente l'expansion de la congruence,
- ▶ $\sigma_{\mu\nu}$ est un tenseur qui représente l'anisotropie de la congruence,
- ▶ $\omega_{\mu\nu}$ est un tenseur qui représente la rotation de la congruence
- ▶ ¹ Raychaudhuri, A. K. (1955). "Relativistic cosmology I.". Phys. Rev. D 98: 1123

Etude des congruences

- ▶ Appliquons cette équation au cas de la relativité générale (en utilisant l'équation d'Einstein pour évaluer $R_{\mu\nu}$ en fonction de $T_{\mu\nu}$). On s'aperçoit que pour un univers avec de la matière énergie, satisfaisant certaines conditions « raisonnables¹ », (énergie locale non négative pour le premier théorème de Penrose), ces géodésiques convergent inéluctablement et finissent par se couper. Le point où elles se coupent, qui caractérise la présence d'une singularité², est appelé caustique.
- ▶ Ceci se révélera un outil essentiel pour démontrer les théorèmes des singularités qui vont suivre. Lapidairement on peut dire que si dans un univers, il y a de la matière énergie, alors il y a nécessairement au moins une singularité.
- ▶ ¹ Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry » p 174-177. Addison Wesley
- ▶ ² Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry ». Addison Wesley Appendix F p 459-465 .

Etude des congruences

- ▶ Petrov (1954) et Pirani (1957)¹ entreprennent indépendamment de leur côté une classification des espaces temps², en fonction de leur degré de symétrie en considérant le nombre de valeurs propres distinctes³ qu'on peut attribuer au tenseur de Weyl (considéré comme un opérateur). Cette classification fait correspondre des congruences de géodésiques nulles à chaque classe d'espace temps⁴.
- ▶ 1 Pirani F.A.E (1957) ; Invariant formulation of gravitational radiation theory. Phys. Rev. 105: 1085
- ▶ 2 Petrov A. Z.(1954). Classification of space defining gravitational fields. Sci. Not. Kazan State Univ.114. 55
- ▶ 3 On obtient six classes (I,II,D,III,N,O) qui caractérisent différents types d'espace temps. Le tenseur de Weyl associé au type I (4 valeurs propres distinctes) est qualifié d'algébriquement général, les autres d'algébriquement spécial. Landau., Lifchitz .E (1994),Ed. « Class.Petrov“ in Théorie des champs Mir-Ellipses p 343-346
- ▶ 4 Pour la solution de Kerr, par exemple, le tenseur de Weyl est de type D (2 racines doubles). Il y correspond deux congruences de géodésiques nulles (une entrante une sortante) qui génèrent cet espace temps.

Le débat sur la singularité centrale

- ▶ C'est vers 1960, comme nous l'avons mentionné, qu'on commence à bien comprendre la structure des trous noirs. Cela va permettre d'aller un peu plus loin dans la compréhension de la nature des singularités. Les quelques outils que nous avons cités vont se révéler essentiels, mais d'autres méthodes¹ complémentaires qui vont permettre d'aller plus loin commencent à voir le jour.
- ▶ A cette époque deux points de vue se confrontent, celui des physiciens de l'ouest et celui de l'école russe au sujet du résultat au centre de l'effondrement en trou noir.²
- ▶ ¹ Gravitation, Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973) Freeman New York, Chap. 34 “ Global techniques, horizons, and singularity theorems” p 916- 940
- ▶ ² Thorne K. S (1997) Trous noirs et distorsions du temps, Champ Flammarion (chap 13 « à l'intérieur des trous noirs » p 481-517.

Le débat sur la singularité centrale

- ▶ En effet le mécanisme de destruction de la matière, par les forces de marées (étirement dans le sens radial, compression transversale) qui deviennent infinies à $r = 0$, au cours de cet effondrement et son résultat n'est pas clair. En l'absence d'une théorie quantique de la relativité on ne voit pas de limite finie correspondant à un état de la matière particulier qui pourrait l'enrayer. L'école russe I.M Kalatnikov et E.M Lifchitz pensaient que cela était un artéfact de la symétrie parfaite de la solution et qu'une petite asymétrie en se développant pendant l'effondrement devait générer des instabilités et empêcher l'implosion, voire provoquer une explosion. Se posait en fait le problème de la stabilité des singularités en relativité générale.
- ▶ En 1964 la situation était assez confuse.

Introduction des méthodes globales

- ▶ En 1965 Penrose¹ (1965b), en introduisant les méthodes globales² utilisant la topologie³, démontre que au contraire, ce n'est pas un artéfact de la symétrie. En effet, si certaines conditions sont satisfaites, en particulier l'existence de surfaces piégées et la condition d'énergie faible (énergie locale non négative), cela implique que, indépendamment de la symétrie, le développement de singularités est inéluctable. A Londres, en été 1965, dans une salle de conférence comble, Kalatnikov expose que selon leurs travaux (avec Lifchitz) les trous noirs n'abritent pas de singularités, du fait de l'instabilité liée à la croissance des déformations par rapport à la symétrie, ce qu'ils pensaient avoir démontré par les méthodes classiques locales que tous les physiciens présents connaissaient bien.

- ▶ ¹ Penrose R. (1965). Gravitational collapse and space time singularities. Phys. Rev. Letters Vol 14, N.3 p 57-59. ² Par opposition aux méthodes qui s'appuient sur les équations différentielles du champ (qui sont locales). ³ K. Thorne fait remarquer que ce n'est pas étonnant que les découvertes dans ce domaine aient été trustées par les physiciens théoriciens britanniques, car ils reçoivent une solide formation mathématique à la différence des américains plus pratiques. Quant aux théoriciens physiciens français, encore meilleurs en mathématiques, l'excès de rigorisme les rend improductifs (selon K. Thorne).

Le débat sur la singularité centrale

- ▶ A la fin de l'exposé, C. Misner exprime son désaccord en s'appuyant sur le théorème que Penrose venait de démontrer en 1965. La délégation soviétique, prise par surprise, était désorientée du fait que d'une part elle avait eu du mal à suivre l'exposé en anglais assez vif de Misner et d'autre part que le théorème de Penrose reposait sur des arguments topologiques mal connus des experts de la relativité à la différence de leur démonstration qui était fondée sur des méthodes qui avaient fait leurs preuves. Penrose devait donc se tromper. En 1969 Lifchitz devait reconnaître leur erreur. En 1961, ils n'avaient pas trouvé une solution présentant des perturbations parfaitement aléatoires, mais depuis ils avaient fini par en trouver une avec un étudiant en thèse V. Belinsky.

Le débat sur la singularité centrale



- ▶ Cette nouvelle singularité B.K.L (Belinsky, Kalatnikov, Lifchitz)¹ devait correspondre selon eux à l'état de la singularité centrale résultant de l'effondrement d'une étoile ou du Big crunch éventuel de l'univers.
- ▶ Penrose (1968a)² et Hawking vont poursuivre leurs travaux en utilisant cette nouvelle méthode et aboutir à la démonstration de nouveaux théorèmes (Hawking 1966a³, 1966b⁴1971b⁵, 1972a⁶,1973⁷, Hawking et Penrose 1969⁸, Hawking et Ellis 1973⁹). Avant de poursuivre l'étude de ces nouveaux théorèmes attardons nous un peu sur la caractérisation et la nature des singularités¹⁰

- ▶ ¹ Belinskii V.A, Kalatnikov I, Lifchitz E. (1970). Oscillatory approach to a singular point in the relativistic cosmology. Adv. Phys. 19, 523-573.. ² Penrose R. (1968a). Structure of spacetime in "DeWitt and Wheeler". §34.1-34.4,41.7-41.11, Boxes 34.1,34.2,44.3 . ³ Hawking S.W.(1966a). Singularities and the geometry of spacetime. Adam prize essay. Cambridge univers.UK. ⁴ Hawking S.W. (1966b). The occurrence of singularities. Proc. R. Society . London A 294. 511-521. ⁵ Hawking S.W.(1971) Gravitational radiation from colliding black holes. Phys. Rev. Letters 26,1344-1346. ⁶ Hawking. S.W.(1972a). Black holes in general relativity. Commun. Math.Phys. 25, 152-166. ⁷ Hawking S.W. (1973).The event horizon. In DeWitt and DeWitt , §34.1-34.5. ⁸ Hawking S.W. and Penrose R. (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. London A 314,529-548. Hawking S.W. and Penrose R. (1997).La nature de l'espace et du temps. Nrf essais. Galimard (trad. F. Balibar). ⁹ Hawking S.W and Ellis G.F.R.(1973). The large scale structure of space time. Cambridge university press, Cambridge. ¹⁰ F. J. Tipler, C. J. S. Clarke, and G. F. R. Ellis, "Singularities and horizons-A review article," In General relativity and gravitation: One hundred years after the birth of Albert Einstein, ed. A. Held (Plenum Press, New York, 1980). S'y référer pour plus de détails sur ce qui est exposé ici.

Critères de caractérisation d'une singularité

- ▶ Nous avons vu que la première manifestation est apparue par des divergences dans la forme de la métrique. Le déterminant qui devait être non nul et non infini a fourni un premier critère qui s'est révélé rapidement inadéquat.
- ▶ La divergence de scalaires de courbure a fourni un critère plus solide. Cependant l'approche de l'étude des singularités par des méthodes topologiques conduit naturellement à rechercher un critère de ce type. Une définition plutôt bien admise aujourd'hui est de considérer qu'une singularité se caractérise par l'existence dans la variété représentant l'espace temps de géodésiques incomplètes (dont le paramètre affine ne s'étendent pas indéfiniment dans au moins une des deux directions, à partir d'un point de la géodésique).

Critères de caractérisation d'une singularité



- ▶ Pourtant cette définition largement utilisée souffre de quelques contre exemples. Il a été montré par exemple que l'incomplétude des géodésiques temporelles, spatiales ou nulles étaient indépendantes et qu'il existait des espaces temps où les géodésiques nulles étaient incomplètes mais pas les géodésiques temporelles et spatiales. De plus, dans un espace temps où les géodésiques de tous types sont toutes complètes, il peut exister des lignes d'univers de type temps sur lesquelles l'accélération reste toujours finie qui sont incomplètes, autrement si des particules en chute libre ne rencontrent jamais de singularités, une fusée en accélération peut en rencontrer une, dans un coin de l'espace temps inaccessible aux géodésiques¹.
- ▶ ¹ Ceci est à rapprocher des boucles temporelles (qui sont une alternative aux singularités) dans la solution de Kerr. Ce sont des lignes d'univers de type temps non géodésiques.

Critères de caractérisation d'une singularité

- ▶ Une partie du travail relatif à ces théorèmes de singularités est donc de commencer à définir précisément ce qu'est une singularité¹. La tâche n'est pas simple comme Geroch² l'a montré en examinant systématiquement les possibilités de pathologies diverses des variétés associées aux espaces temps de la relativité générale. Cela a donné lieu à de nombreuses recherches, un large consensus ayant été atteint sur la proposition de Schmidt³.
- ▶ La définition très technique de Schmidt a la signification suivante.
- ▶ ¹ Plusieurs définitions ont été proposées la plus utile et utilisable étant la frontière causale développée par Penrose et Carter Hawking S.W and Ellis G.F.R.(1973). The large scale structure of space time. Cambridge university press, Cambridge. ² Geroch, R.P.(1967). Singularities in spacetime of general relativity: Their definition, Existence and local characterization. Doctoral dissertation, Princeton university § 32.7-44.1, Epigraph to Chap 41 Geroch, R.P.(1968). What is a singularity in general relativity ?. Ann. Phys. (U.S.A)48, 526-540. ³ Schmidt, B.G.(1971). A new definition of singular points in general relativity. Gen.Rel. Grav.1,269-280

Critères de caractérisation d'une singularité

- ▶ Considérons dans une variété représentant un espace temps toutes les géodésiques de type espace (trajectoires des tachyons), les géodésiques nulles (trajectoires de photons), les géodésiques temporelles (trajectoire des observateurs en chute libre) et les lignes d'univers de type temps dont l'accélération reste bornée (trajectoires que des observateurs peuvent en principe décrire).
- ▶ Supposons qu'une de ces trajectoires ne s'étend pas indéfiniment dans une direction et qu'il soit impossible de surcroît d'étendre la variété au delà du point terminal par exemple parce que la courbure est infinie.
- ▶ Alors ce point, avec tous les autres points terminaux adjacents est appelé une singularité.

Critères de caractérisation d'une singularité

- ▶ Il est apparu à l'usage que cette définition, malgré de nombreuses propriétés très satisfaisantes était d'une part difficile à mettre en œuvre et qu'elle souffrait aussi de quelques exceptions.
- ▶ Aucune de ces « constructions » pourtant très élaborées n'avait de portée vraiment universelle, elles avaient eu pourtant eu le mérite de clarifier le problème posé.
- ▶ Finalement le critère qui s'est révélée être le plus utile jusqu'au aujourd'hui est celui de la frontière causale développée par Penrose et Carter.¹
- ▶ ¹ Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry » p 79-82. Addison Wesley

Critères de caractérisation d'une singularité

- ▶ Malgré ces difficultés l'élan était donné, et il se concrétisa par cinq publications majeures dans la période 1968-1974, à savoir les minutes de la conférence de Battelle en 1967¹ (Wheeler et DeWitt) particulièrement l'article de Penrose (1965) déjà cité, l'article de Geroch (1971a) déjà mentionné, une monographie de Penrose (1972a)², le livre de Hawking et Ellis (1973) et les minutes de l'école d'été des Houches (DeWitt et DeWitt 1973)³ particulièrement les articles de Hawking et Carter. Cette piste allait se révéler très féconde si on en juge au nombre de théorèmes qui allaient suivre que nous évoquerons plus loin.

- ▶ ¹ DeWitt C.M.and Wheeler J.A.(1968). Battelle rencontres, 1967. Lectures in Mathematics and Physics. W.A. Benjamin,New York.. ² Penrose R . (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. And Applied Math. Regional Conference Series inApplied Math. N 7,SIAM, Philadelphia, Pen.. ³ DeWitt c. and DeWitt B.(1973). Black holes : Les astres occlus, Les Houches Summer School, 1972, Gordon and Breach, New York. ¹ DeWitt C.M.and Wheeler J.A.(1968). Battelle rencontres, 1967. Lectures in Mathematics and Physics. W.A. Benjamin,New York. ² Penrose R . (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. And Applied Math. Regional Conference Series inApplied Math. N 7,SIAM, Philadelphia, Pen. ³ DeWitt c. and DeWitt B.(1973). Black holes : Les astres occlus, Les Houches Summer School, 1972, Gordon and Breach, New York.

Critères de caractérisation d'une singularité



- ▶ Un autre débat important que nous avons évoqué à propos de la confrontation Ouest-Est est celui de la nature physique de la singularité. La théorie prévoit une courbure infinie.
- ▶ Pour la géométrie de la variété qui représente l'espace temps cela a un sens mais quel sens physique peut on lui attribuer ?
- ▶ Qu'advient-il de la matière qui s'est effondrée en trou noir (dans le cadre de la théorie « classique » de la relativité). On peut noter que les forces de marées devenant infinies sur la singularité, aucune forme structurée de matière ne peut subsister.
- ▶ Toutefois, on perçoit la difficulté intellectuelle de concevoir que tout cela puisse physiquement se réduire à un point, c'est-à-dire disparaître.

Types de solutions pour la singularité- Cas où la force de marée devient infinie

- ▶ Cela correspond à une courbure infinie en un point. Les forces de marées tendant vers l'infini à l'approche de la singularité disloquent toute structure de la matière et la compriment jusqu'à une densité infinie
- ▶ C'est historiquement la première hypothèse à caractère physique résultant, par exemple de l'effondrement homogène à symétrie sphérique prévu par Oppenheimer Snyder.
- ▶ Un résultat similaire est obtenu par un effondrement très particulier inhomogène mais à symétrie sphérique décrit par Podurets (1966)¹
- ▶ ¹ Podurets M.A.(1966) The character of the singularity in the gravitationnal collapse of a star. Dokl. Akad. Nauk SSSR 167, 275-276. English translation in Sov. Phys. Doklady 11, 275-276

Types de solutions pour la singularité- Cas où la force de marée devient infinie

► L'hypothèse la plus générale dans ce cadre est celle dite d'écrasement « Mixmaster¹ » (modèle de Kasner généralisé) découverte dans le cas d'espace homogène par Misner (1969b)² et par Belinski et Kalatnikov (1969a)³ et analysé dans le cas inhomogène par Belinski et Kalatnikov (1969b⁴, 1970⁵) et par Kalatnikov et Lifchitz (1970)⁶. A titre d'exemple on développera un peu plus les singularités BKL (Belinski, Kalatnikov, Lifchitz), qui font partie de cette catégorie, au paragraphe suivant.

► ¹ Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973). The Mixmaster cosmology in Gravitation. Freeman New York 806-814. ² Misner C.W. (1969b). Mixmaster universes. Phys. Rev. Letters 22, 1071-1074. ³ Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1969a). On the nature of the singularities in the general solution of the gravitation equations.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 56,1700-1712. English Trans. In Sov. Phys. JETP 29,911-917. ⁴ Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1969b). General solution of the gravitation equations with a physical singularity.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 57,2163-2175. English Trans. In Sov. Phys. JETP 30, 1174-1180. ⁵ Belinski V.A., Kalatnikov I.M.(1970). The general solution of the gravitation equations with a physical oscillatory singularity.Zh.Eksp.&Teor.Fiz 59, 314-321. English Trans. In Sov. Phys. JETP 32,169-172. ⁶ Lifchitz E.M, Kalatnikov I.M.(1970). Oscillatory approach to singular point in the open cosmological model. Zh. Eksp.& Teor Fiz. Pis'ma 11,200-203. English trans. In Sov. Phys.JETP lett. 11, 123-125

Types de solutions pour la singularité- Cas où la force de marée devient infinie

- ▶ Les singularités « Mixmaster » sont les seules parmi toutes les singularités explicitement connues qui apparaissent comme étant la solution générique du fait que si on perturbe légèrement et arbitrairement les conditions initiales d'un espace temps qui évolue vers une singularité « Mixmaster », l'espace temps perturbé va aussi évoluer vers une singularité « Mixmaster ».
- ▶ Cette hypothèse est donc considérée comme un candidat sérieux à la description de la singularité centrale.

Singularité sans force de marée infinie

- ▶ Il existe des configurations très particulières, où une géodésique de type temps ou nulle peut être incomplète, non pas parce qu'on atteint un point où les forces de marées sont infinies mais pour d'autres raisons plutôt subtiles.
- ▶ Ceci a été étudié par Geroch (1968)¹ dans le cadre de son étude sur les pathologies des espaces temps déjà mentionné. L'espace temps de Taub-NUT² est un exemple qui appartient à cette catégorie.



- ▶ ¹ Geroch, R.P.(1968). What is a singularity in general relativity?. Ann. Phys. (U.S.A)48, 526-540.
- ▶ ² Misner C.W, Taub A.H.(1968). A singularity free empty universe. Zh. Eksp.& Teor. Fiz 55,233. English original in Sov.Phys. JETP 28,122 (1969)

Singularité associée à une implosion avortée avec rebond

► Si l'influence de la singularité est suffisamment limitée, l'essentiel de la matière qui s'effondre peut alors l'éviter. Comme cette matière ne peut pas franchir l'horizon, elle peut atteindre un état de compression maximum élevé, mais fini, et exploser vers une autre région de l'espace temps dans le cas de topologie multiconnexe (trous de ver). Les solutions analytiques de l'effondrement d'une sphère de matière chargée appartiennent à cette catégorie (Novikov 1966¹, de la Cruz et Israel 1967², Bardeen 1968³).

► ¹ Novikov I.D. (1966a). Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere. Zh. Eksp. & Teor. Fiz Pis'ma 3,223-227. English trans. In Sov. Phys. JETP Lett. 3, 142-144.

► ² De la Cruz V., Israel W. (1967). Gravitational bounce. Nuovo Cimento A 51, 744-760

► ³ Bardeen J.M. (1968). General relativistic collapse of charged dust (abstract). Bull. Am. Phys. Soc. 13, 41.

Singularité associée à une implosion avortée avec rebond

► Si l'influence de la singularité est suffisamment limitée, l'essentiel de la matière qui s'effondre peut alors l'éviter. Comme cette matière ne peut pas franchir l'horizon, elle peut atteindre un état de compression maximum élevé, mais fini, et exploser vers une autre région de l'espace temps dans le cas de topologie multiconnexe (trous de ver). Les solutions analytiques de l'effondrement d'une sphère de matière chargée appartiennent à cette catégorie (Novikov 1966¹, de la Cruz et Israel 1967², Bardeen 1968³).

► ¹ Novikov I.D. (1966a). Change of relativistic collapse into anticollapse and kinematics of a charged sphere. Zh. Eksp. & Teor. Fiz Pis'ma 3,223-227. English trans. In Sov. Phys. JETP Lett. 3, 142-144.

► ² De la Cruz V., Israel W. (1967). Gravitational bounce. Nuovo Cimento A 51, 744-760

► ³ Bardeen J.M. (1968). General relativistic collapse of charged dust (abstract). Bull. Am. Phys. Soc. 13, 41.

Singularité associée à une implosion avortée avec rebond



- ▶ Un tel phénomène impose que l'extrémité du trou de ver qui « explose » (connecté à l'autre univers) a été formée en même temps que l'univers avec une masse et un moment angulaire (mesurée par les orbites képlériennes à l'infini, et l'entraînement de référentiel) qui est exactement la même que celle qui entre dans l'extrémité connectée au trou noir.
- ▶ Inutile de dire que cela semble physiquement non plausible et rend cette hypothèse surréaliste.

Autres hypothèses



- ▶ Il peut y avoir une combinaison des hypothèses ci-dessus. D'autre part le sujet étant hautement spéculatif, il ne serait pas étonnant que des hypothèses radicalement nouvelles voient le jour dans le futur.
- ▶ Il est certain qu'une théorie de gravitation quantique apporterait sans doute des éclaircissements, sur la phase ultime de l'effondrement en particulier lorsque la taille du rayon de Schwarzschild s'approche de la longueur de Planck, là où la relativité générale n'est plus vraiment la théorie qui domine les phénomènes, les effets quantiques devant être prédominants.

Singularité BKL

- ▶ Examinons plus en détail, une solution particulière de singularité mixmaster qui a été plutôt bien étudiée. L'idée d'un effondrement bien symétrique, sans soubresauts paraissant un peu trop idéale, l'école russe avait imaginé une issue un peu plus agitée. Selon eux, les perturbations par rapport à la symétrie inhérente à la solution génèrent de fortes instabilités qui entraînent des oscillations importantes de l'effet de marée, particulièrement destructrices, en particulier lorsque le trou noir vient de se former. D'abord développé pour la cosmologie pour proposer un modèle¹ à l'approche de la singularité finale (le Big Crunch comme on l'appellera plus tard) cette description s'appuie sur classification des espace homogènes. Un sujet intéressant est d'étudier les types d'espace temps qu'on obtient en fonction de ses symétries. Ainsi les espaces temps à symétrie maximum sont très peu nombreux¹.

- ▶ ¹ Espace temps de Minkowski, de De Sitter et Anti Sitter. ¹ Landau., Lifchitz .E (1994), §116-118. in "Théorie des champs " Ed Mir-Ellipses p 491-512

Singularité BKL



- ▶ Si la symétrie s'applique seulement à la section spatiale ce qui est le cas dans les théories modernes en cosmologie, on obtient d'autres types d'espace temps. Si on impose que l'espace soit homogène et isotrope, ce qui correspond à des conditions de symétrie très fortes, la forme de la métrique est unique, c'est la forme de Robertson-Walker (qui dépend du temps, définit une dynamique de l'espace temps).
- ▶ .

Singularité BKL- espaces homogènes

- ▶ Si on n'impose plus l'isotropie, mais seulement l'homogénéité, alors on va trouver d'autres solutions. Sans rentrer dans les détails du calcul assez technique, le principe et les grandes lignes de la méthode pour trouver ces solutions sont les suivants :
- ▶ A partir de l'expression générale de la métrique spatiale associée au ds^2 dans un espace Riemannien : $dl^2 = \gamma_{ij}(x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j$,
- ▶ Une transformation de coordonnées donne : $dl^2 = \gamma_{ij}(x'^1, x'^2, x'^3) dx'^i dx'^j$.
- ▶ L'espace est dit homogène s'il admet le groupe de transformation permettant de faire coïncider un point donné avec n'importe quel autre point donné. Dans l'espace tridimensionnel les transformations sont déterminées par les valeurs des trois paramètres indépendants (degrés de liberté).

Singularité BKL- espaces homogènes

- ▶ Dans l'espace Euclidien c'est le groupe des translations qui est caractéristique de l'homogénéité. Il laisse invariant les trois éléments différentiels dx, dy, dz . Dans un espace non Euclidien, le groupe de transformation associé à un espace homogène va également laisser invariant les trois formes différentielles dx^i , mais qui ne sont pas des différentielles totales dans ce cas¹.
- ▶ On va exprimer ces dx^i sous forme triadique², ce qui va permettre de chercher les constantes de structure du groupe. La classification des espaces homogènes consiste à chercher tous les ensembles non équivalents de constantes de structure. Le résultat (classification de Bianchi -1918) est donné ci dessous
- ▶ ¹ Et pour cause le « dx^i » n'est pas une forme différentielle, mais est une base pour le gradient de la fonction de coordonnée sur la variété. cf Carroll S. M., (2004). « Space time and Geometry » p 72 Addison Wesley.
- ▶ ² Landau., Lifchitz .E (1994), Tétrades in "Théorie des champs " Ed Mir-Ellipses p 379-382

Singularité BKL- espaces homogènes

Si on cherche une solution pour laquelle les composantes du tenseur métrique ne dépendent que de $t^{\underline{1}}$, avec un référentiel approprié, on trouve une solution qui satisfait à la condition d'homogénéité pour la métrique spatiale, qui permet de définir la forme de la métrique anisotrope suivante définie par Kasner (1921) :

$$ds^2 = dt^2 - t^{2p_1} \cdot dx^2 - t^{2p_2} \cdot dy^2 - t^{2p_3} \cdot dz^2 \quad \underline{2}$$

Où le calcul a montré que p_1, p_2, p_3 sont des nombres quelconques, avec :

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1, \quad p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 1$$

Type	a	n_1	n_2	n_3
I	0	0	0	0
II	0	1	0	0
VII ₀	0	1	1	0
VI ₀	0	1	-1	0
IX	0	1	1	1
VIII	0	1	1	-1
V	1	0	0	0
IV	1	0	0	1
VII _a	a	0	1	1
III ($a=1$) } VI _a ($a \neq 1$) }	a	0	1	-1

Figure 6-7-1 : a est un paramètre positif et n_1, n_2, n_3 correspondent aux trois degrés de libertés.

1 On s'intéresse à la dynamique de telles solutions (comme dans la solution FLRW).

2 Univers vide spatialement homogène de type (Bianchi I) défini par Kasner : Kasner, E (1921a).

Geometrical theorems on Einstein's cosmological equation. Am.J.Math. 43, 217-221

Singularité BKL- espaces homogènes

- ▶ La métrique spatiale ainsi définie est homogène et plane mais anisotrope dans lequel les volumes croissent au cours du temps proportionnellement à t ; le déterminant de la métrique valant : $(-g)^{1/2} = t$, et dont les distances linéaires selon les axes y, z croissent et décroissent selon l'axe des x .
- ▶ L'instant $t = 0$ est singulier (sauf $p_1 = p_2 = 0, p_3 = 1$).
- ▶ Les trois nombres p_1, p_2, p_3 ne peuvent pas être égaux. L'égalité de deux parmi trois se produit pour les permutations de configurations $(0, 0, 1)$ et $(-1/3, 2/3, 2/3)$. Dans tous les autres cas les nombres p_1, p_2, p_3 sont différents.
- ▶ L'équation précédente impose que l'un soit négatif et les autres positifs. Si on les range dans l'ordre $p_1 < p_2 < p_3$ leurs valeurs seront comprises dans les intervalles :
- ▶ - $1/3 \leq p_1 \leq 0, 0 \leq p_2 \leq 2/3, 2/3 \leq p_3 \leq 1$

Singularité BKL- espaces homogènes

Régime oscillatoire à l'approche de la singularité

- ▶ La singularité temporelle de caractère oscillatoire de la métrique peut s'obtenir dans le cas de l'espace homogène de type IX, référencé dans le tableau ci-dessus. Rappelons que ces solutions ont été étudiées au départ dans le cadre de la cosmologie pour tenter de décrire la singularité temporelle.
- ▶ A partir de la métrique générique de Kasner (6-7-1), on va étudier une solution dérivée inhomogène, plus réaliste physiquement. La métrique n'est plus indépendante des coordonnées d'espace, les sections spatiales peuvent avoir une topologie de 3-sphère comme dans les univers de Friedmann, où les exposants p_1, p_2, p_3 vont pouvoir devenir des fonctions du temps. Ceci va se comporter comme une perturbation de la métrique homogène car à l'approche de la singularité les dérivées spatiales de la métrique sont négligeables devant les dérivées temporelles, cependant cela n'est pas sans conséquences dans ces conditions extrêmes.

- 
- ▶ Les équations associées ne donnant pas de solution analytique exacte, on va utiliser une méthode approchée pour étudier le comportement lorsqu'on se rapproche de la singularité.
 - ▶ On utilise le paramétrage suivant :
 - ▶ $p_1 = -u/(1 + u + u^2)$
 - ▶ $p_2 = (1 + u)/(1 + u + u^2)$
 - ▶ $p_3 = u(1 + u)/(1 + u + u^2)$
 - ▶ Qui satisfait les équations (6-7-2) où chaque p_i correspond à une valeur de u . Dans ce type de solution le comportement de type Kasner pour un u donné peut persister pendant des décades d'expansion du volume, jusqu'à ce que les dérivées spatiales jouent enfin un rôle. Le rôle joué par la courbure de l'espace est alors décisif et brutal.

- 
- ▶ L'expansion dans une direction qui était pilotée par un type correspondant à un paramètre $u = u_0$ va être transformée en une expansion pilotée par un paramètre $u = -u_0$ (ce qui par paramétrage est équivalent à $u = u_0 - 1$). Une nouvelle ère de Kasner va se dérouler avec ce nouveau paramètre u , jusqu'à ce que le même phénomène se reproduise et ainsi de suite les alternances se précipitant et amplifiant au fur et à mesure qu'on se rapproche de la singularité. Voilà pour le principe général de la méthode.
 - ▶ L'analyse détaillée assez complexe est faite dans le Landau Lifchitz (§116-118, voir référence).
 - ▶ Les perturbations par rapport au régime de Kasner, liées à l'existence d'un second membre dans les équations vont entraîner des changements d'ères au fur et à mesure qu'on se rapproche de la singularité, l'ordre des transferts prenant de plus en plus un caractère aléatoire.

► La figure ci-contre montre comment les oscillations dans les différentes dimensions spatiales se développent en fonction du temps. On voit que la solution consiste en une série infinie, convergente en temps, d'ères de type Kasner, qui se succèdent, la direction des axes et les paramètres p_i changeant à la transition, et l'amplitude des oscillations tendant vers l'infini à l'approche de la singularité. Les trois directions spatiales sont désignées par HB (haut bas), NS (Nord Sud), EO (Est Ouest).

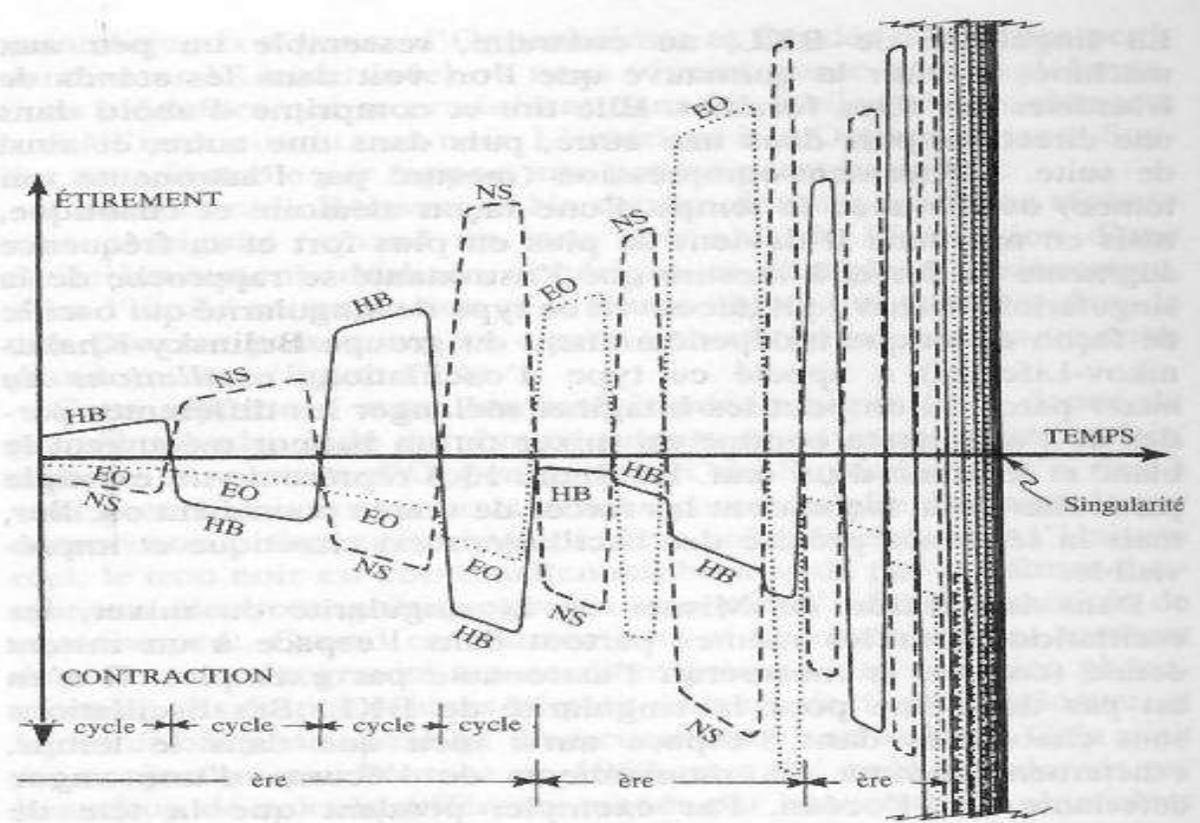


Figure 13.6 Un exemple de la manière dont les forces de marée pourraient osciller avec le temps dans une singularité de BKL. Les forces de marée agissent de façon différente dans les directions perpendiculaires. Ces directions sont appelées ici, par convention, HB (pour haut-bas), NS (pour nord-sud) et EO (pour est-ouest), et chacune des courbes décrit le comportement de la force de marée dans l'une de ces directions. Le temps est porté horizontalement. A tout instant où la courbe HB est au-dessus de l'axe horizontal du temps, la force de marée étire dans cette direction, tandis que, lorsqu'elle est au-dessous de cet axe, la force comprime dans la même direction. Plus haut se trouve la courbe au-dessus de l'axe, plus forte est l'étirement, plus bas est la courbe au-dessous de l'axe, plus forte est la compression. Notez les points suivants : (1) A chaque instant il y a compression dans deux directions et étirement dans la troisième. (2) La force de marée oscille entre étirement et compression, chaque oscillation est appelée un « cycle ». (3) Les cycles sont groupés en ères. Pendant chaque ère l'une des directions est soumise à une compression relativement stable pendant que les deux autres directions oscillent entre étirement et compression. (4) Quand l'ère change, la direction stable change. (5) A mesure que la singularité se rapproche, la fréquence de l'oscillation et l'intensité des forces de marée augmentent indéfiniment. Les détails de la façon dont les cycles se regroupent en ères et dont les schémas d'oscillation changent aux changements d'ères sont parfois appelés « carte chaotique ».

Singularité BKL- cas du trou noir

- Ceci est-il applicable au cas du trou noir ? D'une part, comme nous l'avons indiqué l'espace est homogène sous l'horizon et d'autre part un trou noir correspond à un « big Crunch de l'espace temps de la région sous l'horizon », ce pour quoi le modèle avait été conçu, donc le modèle devrait être applicable.¹ Comment cet effet se manifeste-t-il ? On considère par exemple qu'un trou noir de quelques milliards de masses solaires qui, en théorie, présente un effet de marée négligeable au franchissement de l'horizon. S'il vient juste de se former il est animé de violentes oscillations chaotiques de ce type s'étendant très loin vers l'horizon faisant subir à des objets l'ayant franchi des stress très importants qui entraînent leur dislocation. Cet effet s'amenuise assez rapidement avec le temps et ces effets chaotiques dévastateurs ne deviennent sensibles que lorsque on s'approche de la singularité centrale.

- ¹ La méthode utilisée, du fait que les équations n'ont pas de solution analytique exacte, repose sur une approximation en développement de puissance à proximité de la singularité. Barrow et Tipler (1979) ont souligné qu'une telle méthode n'est pas totalement fiable. Barrow (1978a) et Barrow and Matzner (1978) suggèrent qu'en général la singularité initiale ne sera pas de type BKL.

Théorème des singularités (Hawking-Penrose)

- Le théorème des singularités de Hawking et Penrose¹ (le plus important d'une large classe) nous garantit l'ubiquité des singularités dans des espaces non symétriques. « Un espace temps M , solution des équations d'Einstein, contient nécessairement des géodésiques ou courbes de type temps incomplètes, (est donc singulier au sens de Schmidt), si les quatre conditions suivantes sont satisfaites. M ne contient pas de boucles temporelles (condition de causalité raisonnable). En tout point événement de M , pour chaque vecteur unitaire de type temps, le tenseur énergie impulsion satisfait la condition : $(T_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}T)u^\mu u^\nu \geq 0$ (condition d'énergie forte). La variété est générique (pas trop symétrique) : Il existe au moins un point événement par lequel passe le vecteur unitaire u tangent à une géodésique temporelle ou nulle où sa relation avec la courbure locale ne satisfait une relation spécifique. On doit avoir : $U_{[\alpha} R_{\beta] \gamma \delta [\epsilon} u_{\rho]} u^\gamma u^\delta \neq 0$ au moins en un point de la géodésique. La variété contient une surface piégée. ¹ Hawking S.W. and Penrose R. (1969). The singularities of gravitational collapse and cosmology. Proc. Roy. Soc. London A 314,529-548



- ▶ Avant l'établissement de ces théorèmes, on pouvait espérer que l'effondrement en une singularité de Schwarzschild était un artefact de la symétrie sphérique et que les géométries typiques resteraient non singulières (comme cela se produit en gravitation Newtonienne).
- ▶ Mais le théorème de Hawking-Penrose montre que une fois que l'effondrement a atteint un certain point, l'évolution vers la singularité est inévitable.
- ▶ C'est l'incomplétude des géodésiques qui nous révèle l'existence d'une singularité : il existe des géodésiques qui ne peuvent pas être prolongée dans la variété, et qui néanmoins se terminent à une valeur finie du paramètre affine associé.
- ▶ C'est quand une surface piégée apparaît que le point de non retour est atteint. Ceci suggère qu'une singularité est associée à un horizon.

Conjecture de censure cosmique)

- ▶ Ce credo s'exprime haut et fort à travers la conjecture de censure cosmique¹.
- ▶ *Un effondrement gravitationnel depuis un état générique, initialement non singulier, dans un espace asymptotiquement plat soumis à la condition d'énergie dominante, ne peut pas produire de singularité nue.*
- ▶ Une singularité nue est une singularité qui peut émettre un signal lumineux pouvant se propager jusqu'à l'infini nul F^+ ; autrement dit qui n'est pas caché derrière un horizon événementiel.
- ▶ Remarquons que la conjecture se réfère à la formation des singularités nues, pas à leur existence : Il y a des solutions dans lesquelles des singularités nues spatiales existent dans le passé (comme les trous blancs de Schwarzschild) ou des singularités nues temporelles éternelles existent.
- ▶ ¹ Penrose R. (1969). Gravitational collapse : The role of general relativity. *Nuevo Cimento* 1, special number 252-276



- ▶ La conjecture de censure cosmique n'a pas été prouvée, bien que toutes les tentatives pour trouver des contre exemples aient échouées. La contrainte d'état initial générique est importante, car des modèles numériques ont montré que pour un ajustement très fins des paramètres initiaux on pouvait obtenir, par effondrement, des singularités nues.
- ▶ Une démonstration d'une certaine forme de la conjecture de censure cosmique reste un des problèmes en suspens de la Relativité Générale classique.

Théorème des aires

- ▶ Une conséquence de la conjecture de censure cosmique (ou de certaines assertions équivalentes) est que les trous noirs classiques ne rétrécissent jamais, ils ne peuvent que devenir plus gros.
- ▶ La taille d'un trou noir est mesurée par la surface de l'horizon des évènements, c'est-à-dire l'aire spatiale de l'intersection de l'horizon événementiel avec une tranche de type espace. Nous avons alors le théorème des aires¹ de Hawking²:
- ▶ *En supposant que la condition d'énergie faible et la conjecture de censure sont satisfaites, l'aire de l'horizon événementiel du futur, dans un espace asymptotiquement plat, ne peut jamais décroître.*
- ▶ ¹ Bardeen J.M, Carter B., Hawking B.W. (1973). The four laws of black holes mechanics. Commun.Math. Phys. In press
- ▶ ² Préalablement citée par Israel. Israel W. (1971). Personal communication. [Box 33.4] in Misner C.W, Thorne K., Wheeler J.A.(1973) Gravitation Freeman New York

- 
- ▶ Pour un trou noir de Schwarzschild, l'aire est une fonction croissante de la masse, donc ce théorème implique que pour ce type de trous noirs, la masse ne peut pas décroître.
 - ▶ Mais pour un trou noir en rotation par exemple, ce n'est plus le cas, l'aire dépend d'une combinaison de la masse et du moment angulaire qu'on peut faire décroître en extrayant de l'énergie de rotation. Le théorème reste cependant valide, l'aire de l'horizon ne décroît pas.
 - ▶ Ce théorème est valide dans le contexte de la Relativité générale « classique » car, si on sort de ces hypothèses, la masse peut décroître par le rayonnement quantique de Hawking, ceci peut être attesté par le fait qu'en QFT, en espace courbe, on peut violer la condition d'énergie faible.

Les trous noirs n'ont pas de poils

- ▶ Ils sont totalement définis par un maximum de 3 paramètres. La masse, la charge et le moment angulaire. Pour un trou noir de Schwarzschild, sans charge, ni moment angulaire, le seul paramètre est la masse. Les trous noirs sont des objets parfaits, toutes les irrégularités ont été évacuées ou rayonnées lors du processus de formation. Ceci a été démontré conjointement par Penrose, Israel¹, Carter² et Robinson pour les trous noirs stationnaires sans charge. Il a été étendu par Robinson³ au cas chargé.
- ▶ ¹ Israel.W.(1967a) Event horizons in static vacuum spacetimes. Phys. Rev. 1776-1779.
- ▶ ² Carter B. (1973) . Properties of the Kerr metric in Dewitt and Dewitt.
- ▶ Bardeen J.M, Carter B., Hawking B.W. (1973) The four laws of black holes mechanics. Commun.Math. Phys. In press
- ▶ ³ Robinson D.C. (1974). Classification of black holes with electromagnetic fields. Phys.Rev. D10, 458-460

Perte d'information dans les trous noirs

- ▶ Le théorème d'absence de poils conduit à une situation troublante. Dans la plupart des théories physiques, nous supposons que l'évolution du système dépend des conditions initiales, de sorte que l'information associée à un état, à chaque stade permet de prédire (ou rétro prédire) l'état à un autre moment.
- ▶ En conséquence deux états quelconques qui sont liés par une solution des équations du mouvement doivent nécessiter qu'on spécifie la même quantité d'information. Mais en RG, il semble qu'on puisse partir d'une configuration très complexe de matière, le résultat de son effondrement en trou noir va en faire un objet caractérisé par seulement 3 paramètres.
- ▶ En Relativité Générale classique, ceci n'est pas trop inquiétant, car on peut toujours supposer que ces informations sont toujours présentes mais cachées derrière l'horizon des événements et ne sont ainsi pas vraiment perdues.



- ▶ Mais si on prend en compte la théorie des champs, nous trouvons que les trous noirs s'évaporent et éventuellement disparaissent, ce qui fait que l'information semble vraiment perdue.
- ▶ On peut supposer que le rayonnement de Hawking émis, n'est pas totalement thermique et qu'il contient de l'information au sujet de la composition initiale de l'objet qui s'est effondré, mais aucune description satisfaisante pour ce phénomène n'a été proposée à ce jour.
- ▶ La compréhension de ce « paradoxe de la perte d'information » est considéré généralement comme une clé vers l'élaboration d'une théorie pertinente de gravitation quantique.
- ▶ Ici, nous resterons dans le cadre de la Relativité Générale classique.

Théorèmes d'unicité

► En 1967 Israel ¹ démontre que la solution de Schwarzschild est la solution unique du champ dans le vide au problème du corps central à symétrie sphérique asymptotiquement plat. Il a étendu cette démonstration au cas d'un corps central chargé à symétrie sphérique (Reissner Nordström) en 1968². En 1970 Carter³ démontre que, sous certaines conditions, la solution de Kerr est la solution unique du champ dans le vide asymptotiquement plat au problème du trou noir en rotation. En 1975 et 1977, Robinson⁴ apporte des compléments à cette démonstration, sans toutefois aboutir à une démonstration complètement générale. Comme l'indique B. Carter dans un article⁵ synthétisant les travaux dans ce domaine, il faudra attendre les travaux de Sudarsky et Wald en 1991⁶ et 1993⁷ pour obtenir une démonstration vraiment probante.

- ¹ Israel.W.(1967a) Event horizons in static vacuum spacetimes. Phys. Rev. 1776-1779. ² Israel.W.(1968) Event horizons in static electrovacuum spacetimes. Commun. Math. Phys.8, 245-260. ³ Carter.B. (1970). An axisymmetric Black Hole has only two degrees of freedom. Phys. Rv. Letters 26,331-333. ⁴ Robinson D.C. (1975). Uniqueness of the kerr black hole. Phys. Rev. Lett. 34, 905-906. Robinson D.C. (1977). A simple proof of the generalisation of Israel's theorem. Gen. Rel. Grav. 8, 695-698. ⁵ Carter.B. (1997). Has the black hole equilibrium problem been solved? arXiv:gr-qc/9712038 v1 8dec 1997. ⁶ Sudarsky D., Wald R.M.(1991).Extrema of mass, stationnarity and staticity and solutions to the Einstein Yang Mills equations. Phys. Rev. D46, 1453-74. ⁷ Sudarsky D., Wald R.M.(1993). Mass formulas for stationnary Einstein Yang Mills black holes and a simple proof of two staticity theorems. Phys. Rev. D47,5209-13

Caractéristiques particulières des horizons

- ▶ La raison pour laquelle nous avons fait grand cas des horizons des événements est qu'ils sont quasiment incontournable en RG. Cette conclusion découle de deux résultats intéressants. En résumé, les singularités sont quasiment inévitables, et ces singularités sont cachées derrière des horizons des événements.
- ▶ Bien sûr, ces conclusions se tiennent dans un contexte approprié de condition d'énergie. Il n'est pas difficile de trouver des espaces temps qui n'ont pas de singularités (celui de Minkowski par exemple) et de même de trouver des singularités sans horizons (comme nous le verrons avec les trous noirs chargés).
- ▶ Mais nous croyons que les solutions « génériques » auront des singularités cachées derrière des horizons.

Caractéristiques particulières des horizons

- ▶ Les trous noirs de Schwarzschild sont totalement caractérisés par un seul paramètre (M). Cela les désigne comme des objets quasi idéaux en principe très simples¹.
- ▶ Une autre caractéristique essentielle est le fait qu'on peut y entrer, mais pas en sortir.
- ▶ Donc l'horizon des événements à sa frontière apparaît comme une caractéristique très importante. Dans ce paragraphe nous allons préciser quelques notions qui sont couramment utilisées dans ce contexte.
- ▶ ¹ On verra que cela pose problème vis-à-vis de la conservation de l'information.

Définition d'un horizon

- ▶ Un horizon des événements est une hyper surface séparant les points de l'espace temps reliés à l'infini par des lignes d'univers de type temps de ceux qui ne le sont pas. Pour comprendre ce que cela signifie concrètement, commençons par nous interroger sur ce que nous appelons « l'infini ». En RG, la structure globale de l'espace temps peut prendre de nombreuses formes, auxquelles correspondent différentes notions d'infini. Mais si on considère des trous noirs dans un univers physique nous utilisons le terme « infini » comme un raccourci pour dire « bien loin à l'extérieur du trou noir » et nous estimons qu'à cet endroit l'espace temps peut être valablement approximé par l'espace temps de Minkowski.
- ▶ 1 Horizons des évènements et horizons de Killing : Dans la métrique de Schwarzschild, le vecteur de Killing $K = \partial_t$ de type temps à l'infini devient de type espace lorsqu'il franchit l'horizon des évènements (il est de type nul sur l'horizon lui-même). De façon générale, si un champ de vecteurs de Killing χ^μ est nul sur une hypersurface nulle Σ , nous dirons que Σ est un Horizon de Killing de χ^μ . Remarquons que le champ de vecteurs χ^μ va être « normal » à Σ , car une surface nulle ne peut pas avoir deux vecteurs tangents de type nul linéairement indépendants. La notion d'horizon de Killing est logiquement indépendante de celle d'horizon des évènements, mais dans les espaces temps invariants par translation dans le temps (espaces temps stationnaires), les deux notions sont intimement liées. Sous certaines conditions raisonnables, nous pouvons définir la classification suivante. Tout horizon des évènements Σ dans un espace temps stationnaire asymptotiquement plat est un horizon de Killing pour un certain champ de vecteurs de Killing χ^μ . Si l'espace temps est statique, χ^μ va être le champ de vecteurs de Killing $K^\mu = (\partial_t)^\mu$ représentant les translations dans le temps à l'infini.



- ▶ De cette définition, il est clair que l'horizon des événements est une hypersurface de type lumière (nulle)¹.
- ▶ 1 Horizons des événements et horizons de Killing : Dans la métrique de Schwarzschild, le vecteur de Killing $K = \partial_t$ de type temps à l'infini devient de type espace lorsqu'il franchit l'horizon des événements (il est de type nul sur l'horizon lui-même). De façon générale, si un champ de vecteurs de Killing χ^μ est nul sur une hypersurface nulle Σ , nous dirons que Σ est un Horizon de Killing de χ^μ . Remarquons que le champ de vecteurs χ^μ va être « normal » à Σ , car une surface nulle ne peut pas avoir deux vecteurs tangents de type nul linéairement indépendants. La notion d'horizon de Killing est logiquement indépendante de celle d'horizon des événements, mais dans les espaces temps invariants par translation dans le temps (espaces temps stationnaires), les deux notions sont intimement liées. Sous certaines conditions raisonnables, nous pouvons définir la classification suivante. Tout horizon des événements Σ dans un espace temps stationnaire asymptotiquement plat est un horizon de Killing pour un certain champ de vecteurs de Killing χ^μ . Si l'espace temps est statique, χ^μ va être le champ de vecteurs de Killing $K^\mu = (\partial_t)^\mu$ représentant les translations dans le temps à l'infini.



- ▶ Une hyper surface Σ peut être définie par $f(x) = \textit{constante}$ pour une certaine fonction $f(x)$. Le gradient $\partial_\mu f$ est normal à Σ , si le vecteur normal est nul, l'hyper surface est déclarée de type nul (on dira nulle, pour simplifier), et le vecteur normal est aussi tangent à Σ . Les hyper surfaces nulles peuvent se concevoir comme résultant de l'assemblage de géodésiques nulles (celles qui sont parcourues par la lumière) $x^\mu(\lambda)$, appelées génératrices de l'hyper surface.
- ▶ Pour les horizons du futur des évènements, les génératrices peuvent être limités dans le passé (par exemple, quand un trou noir se forme par effondrement d'étoile) mais il va s'étendre indéfiniment vers le futur et de même avec futur et passé interchangé.
- ▶ Comme l'**horizon des évènements est un concept global**, il peut être difficile d'en localiser un quand on utilise une métrique dans des coordonnées arbitraires.

- 
- ▶ Ici nous nous intéressons à une métrique particulière qui est statique, asymptotiquement plate et contenant des horizons des événements de topologie sphérique.
 - ▶ Dans de tels espaces temps, il y a des coordonnées privilégiées dans lesquelles il est facile d'identifier un horizon des événements.
 - ▶ Dans la solution de Schwarzschild, l'horizon des événements est le lieu où les cônes de lumière « basculent » de sorte que $r = 2GM$ est une surface nulle plutôt qu'une surface de type temps comme celle à $r = \textit{constante}$ pour $r \gg 2GM$.
 - ▶ Le basculement des cônes de lumière est clairement une notion qui dépend des coordonnées (cela ne se produit pas par exemple dans les coordonnées de Kruskal), mais la métrique concernée va nous permettre des constructions analogues.

Surfaces piégées

- ▶ C'est quand une surface piégée apparaît que le point de non retour est **atteint**.
- ▶ Pour comprendre ce qu'est une surface piégée, commençons par nous représenter une 2-sphère (surface $2D$ d'une sphère $3D$ normale), comme ensemble des points à une distance radiale fixée de l'origine, imbriquée dans une tranche de temps constant. Si nous suivons les rayons lumineux émanant de cette surface sphérique dans l'espace temps, un ensemble se dirigeant vers l'intérieur, va décrire une surface sphérique qui diminue au fur et à mesure de la progression tandis que l'autre ensemble pointant vers l'extérieur va définir des sphères de plus en plus grandes au cours de la progression. Mais cela ne va pas se passer ainsi si la 2-sphère de départ a un rayon $r < 2GM$ en géométrie de Schwarzschild, à l'intérieur de l'horizon des événements, les deux ensembles de rayons lumineux émanant d'une telle sphère vont évoluer vers des valeurs de r plus petites (car r est une coordonnée de type temps), et donc vers des surfaces plus petites ($4\pi r^2$).



- ▶ C'est cela que nous entendons par surface piégée : une sous variété à deux dimensions compacte de type espace dont les rayons lumineux en émanant, dirigés vers le futur, *convergent* dans les deux directions partout dans la sous variété.
- ▶ La définition formelle de cette *convergence* est que l'expansion θ est négative, comme décrit par la congruence des géodésiques. En attendant mieux, on peut s'accrocher à l'idée que ces singularités sont cachées par horizons évènementiels, et que cela, à défaut de résoudre le problème, l'élude.
- ▶ L'horizon, membrane unidirectionnelle, joue un rôle de « bouclier » contre les « méfaits » potentiels de la singularité vers l'extérieur.

- 
- ▶ Ici nous nous intéressons à une métrique particulière qui est statique, asymptotiquement plate et contenant des horizons des événements de topologie sphérique.
 - ▶ Dans de tels espaces temps, il y a des coordonnées privilégiées dans lesquelles il est facile d'identifier un horizon des événements.
 - ▶ Dans la solution de Schwarzschild, l'horizon des événements est le lieu où les cônes de lumière « basculent » de sorte que $r = 2GM$ est une surface nulle plutôt qu'une surface de type temps comme celle à $r = \textit{constante}$ pour $r \gg 2GM$.
 - ▶ Le basculement des cônes de lumière est clairement une notion qui dépend des coordonnées (cela ne se produit pas par exemple dans les coordonnées de Kruskal), mais la métrique concernée va nous permettre des constructions analogues.

Gravité de surface

- ▶ A chaque horizon de Killing nous pouvons associer une grandeur appelée **gravité de surface**.
- ▶ La gravité de surface associée à un horizon de Killing est en principe arbitraire, car nous pouvons toujours multiplier un champ de vecteurs de Killing par une constante réelle et obtenir un autre champ de vecteurs de Killing. Dans un espace temps statique, asymptotiquement plat, le vecteur de Killing, associé à l'invariance vis-à-vis des translations dans le temps, $K = \partial_t$, peut être normalisé.
- ▶ Ceci fixe la valeur de la gravité de surface associée à n'importe quel horizon de Killing. Si l'espace temps est stationnaire, le champ de vecteurs de Killing est défini par une combinaison linéaire de translation dans le temps et de rotation, le fait de normaliser $K = \partial_t$, fixe la combinaison linéaire, donc la gravité de surface reste est bien définie.



- ▶ L'appellation « gravité de surface » pour κ est claire seulement dans le cas d'un espace temps statique. Dans ce cas nous pouvons l'interpréter ainsi :
- ▶ *Dans un espace temps statique asymptotiquement plat, la gravité de surface est l'accélération subie par un observateur statique près de l'horizon, telle que mesurée par un observateur à l'infini.*
- ▶ Rappelons que les solutions de trous noirs sont caractérisées par un très petit nombre de paramètres (un seul pour le trou noir de Schwarzschild, le moment d'ordre zéro associé à sa masse), à l'inverse de la multitude caractérisant par exemple une planète.

Horizon des événements- horizon apparent

- ▶ Dans ce chapitre nous avons traité de l'horizon des événements qui est relatif à un trou noir statique ou stationnaire (en fait qui existe depuis toujours). Si nous nous intéressons aux trous noirs astrophysiques, il faut introduire la notion d'horizon apparent.
- ▶ En effet, l'horizon des événements est défini comme le passé causal de l'infini du futur des géodésiques de type lumière.
- ▶ Par définition, au bout d'un temps fini, cet horizon est « virtuel ». Mais si on peut définir et trouver une surface piégée, celle-ci sera considérée comme un horizon apparent qui est intérieur à l'horizon des événements.

Thermodynamique des trous noirs

- ▶ Ceci a fait l'objet d'une conférence à la SAF:
- ▶ <http://www-cosmosaf.iap.fr/Cosmologie.htm>
- ▶ Item: [Le rayonnement de Hawking](#) : par Jacques Fric, université-paris-diderot