

Théorie des champs

Groupe de Symétrie, théorie de jauge

Cours donné à la SAF. Janvier 2021: par Jacques Fric, VP commission cosmologie

Théorie de Jauge

Un Univers qui ne serait constitué que de quarks et de leptons serait ennuyeux et improductif. La dynamique est ce qui décrit leurs interactions, en particulier les états liés dans les hadrons et les atomes. Une conséquence intéressante de la Relativité et de la mécanique quantique est que leur interaction peut être décrite en termes d'échange de particules de médiation.

Ce n'est pas difficile à comprendre

Théorie de Jauge

Considérons deux particules chargées, disons un proton et un électron, séparées par une distance finie. Etant chargées elles exercent l'une sur l'autre une action Coulombienne "électronique" .

Supposons que nous déplaçons légèrement le proton.

Le champ environnant va changer, ainsi que son influence sur l'électron.

Mais la relativité restreinte nous dit que la perturbation ne peut pas se propager plus vite que la lumière (pas d'action instantanée à distance).

Théorie des champs

La description moderne des forces s'appuie sur la notion de champ, donc la perturbation va moduler le champ entre le proton et l'électron.

La mécanique quantique considère ces modulations comme des degrés de liberté dynamiques qui doivent être quantifiés comme les autres.

Les excitations minimales (quanta) du champ sont interprétées comme des particules, et l'interaction entre un proton et un électron est décrit en termes d'échange de ces particules.

Théorie des champs

Comme les équations de Maxwell nous enseignent que le champ électromagnétique a des solutions ondulatoires, dont la lumière est un exemple, nous identifierons ces particules, associées au quanta du champ, aux photons qu'Einstein a introduits pour expliquer l'effet photo-électrique.

Electrodynamique quantique

- La théorie quantique décrivant l'interaction entre les photons et les électrons est appelée l'électrodynamique quantique (QED pour Quantum ElectroDynamics). Cette théorie s'est révélée très fructueuse en termes de prédiction et de précision (10^{-11}).
- Il se trouve qu'on peut déduire l'électromagnétisme classique et la QED de symétries dites de "jauge", introduites dans la théorie des électrons libres. La QED est l'exemple type d'une théorie de jauge.

Exemple des pions

Regardons comment ça marche sur un exemple simple, qui nous permettra également d'introduire le concept de champ, fonction de l'espace-temps dont la quantification des excitations élémentaires seront interprétées comme des particules.

Nous nous en tiendrons à la relativité restreinte (la relativité générale conduisant à un formalisme complexe rarement nécessaire, sauf en cas de conditions extrêmes, à proximité d'un trou noir par exemple).

Exemple des pions (cas simple)

Un pion π^+ , par exemple, est chargé électriquement positivement (charge $+1$) donc est sensible à l'interaction électromagnétique. Il a un spin de 0 , ce qui est caractéristique d'un champ scalaire qui a l'avantage d'être beaucoup plus simple que le champ associé à un fermion comme l'électron par exemple qui a un champ spinoriel. Ce champ scalaire est noté $\Phi(x)$ où x représente la coordonnée d'espace-temps x^μ .

Par une transformation de Lorentz $x \rightarrow x'$ et le champ se transforme comme suit:

$$\Phi'(x') = \Phi(x)$$

Théorie des champs relativistes

- En théorie des champs Relativiste, il nous faut aussi décrire simultanément l'antiparticule π^- . Ceci est nécessaire du fait que, dans les réactions énergétiques, des paires de pions peuvent émerger ex nihilo. Par exemple dans les collisions proton/proton, la réaction:
- $p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$ est possible si l'énergie cinétique de la paire de protons incidente au centre de masse est supérieure à l'énergie de masse au repos des deux pions.
- On pourrait introduire deux champs scalaires $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ pour décrire respectivement le pion et l'antipion

Théorie des champs relativistes

Il est plus élégant de considérer $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$ comme la partie réelle et imaginaire d'un champ complexe :

$$\Phi(x) = \rho(x) e^{i\alpha(x)} = \{\Phi_1(x) + i \Phi_2(x)\} (2)^{-1/2}.$$

$(2)^{-1/2}$ est un facteur de normalisation du module de l'onde dans sa décomposition en partie réelle et complexe.

Équation du mouvement

Si le champ est sans interactions, il va satisfaire l'équation (Klein-Gordon) relativiste du mouvement :

$$\square \Phi (\mathbf{x}) \equiv (\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2) \Phi (\mathbf{x}) = m^2 \Phi (\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

où m est la masse du pion (Cette équation s'appliquant aussi pour le champ conjugué Φ^* qui associé à Φ peut produire deux états indépendants au lieu des deux fonctions $\Phi_1(x)$ et $\Phi_2(x)$). Cette équation est invariante par transformation de Lorentz, car le d'alembertien \square et m^2 sont invariants tous les deux. Elle est la transposition, en termes d'opérateurs appliqués à la fonction d'onde, de l'équation de la norme du 4-vecteur \mathbf{p} donnée par $p_\mu p^\mu = m^2 c^2$, ($p \rightarrow \partial_\mu$).

Le symbole ∇ désigne le gradient d'une fonction, ici la fonction d'onde. Ici, la position (exposant ou indice) de μ dénote qu'on doit faire une sommation sur les différentes valeurs de μ . C'est la convention d'Einstein.

Choix du Lagrangien

Si nous choisissons la densité de Lagrangien invariante par transformation de Lorentz $L(\mathbf{x})$

$$L(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\partial_\mu \Phi(\mathbf{x}))^* (\partial^\mu \Phi(\mathbf{x})) + \frac{1}{2} m^2 (\Phi^*(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x})) \quad (6.5)$$

On note la convention d'Einstein de sommation, $\partial_\mu \partial^\mu = \partial_0 \partial^0 + \partial_1 \partial^1 + \partial_2 \partial^2 + \partial_3 \partial^3$.

Invariance globale

On voit que (6.5) est invariant par changement de la phase d'une même valeur partout, $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$ avec α constant, du fait de la présence des fonctions conjuguées.

Ceci est appelé une invariance globale du Lagrangien.

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} [\partial_\mu e^{i\alpha} \Phi(x)]^* [\partial^\mu e^{i\alpha} \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha} \Phi^*(x) e^{i\alpha} \Phi(x)]$$

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} e^{-i\alpha} [\partial_\mu \Phi(x)]^* e^{i\alpha} [\partial^\mu \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha} \Phi^*(x) e^{i\alpha} \Phi(x)]$$

Le 2^{ième} terme est invariant même si α dépend de x , le problème c'est la dérivée dans le 1^{er} terme.

Invariance locale, dite invariance de jauge

Nous voulons que le lagrangien soit aussi invariant par un changement de phase qui a une valeur qui dépend du point de l'espace-temps, ce qui s'écrit: $\alpha = \alpha(x)$.

Ceci est appelé une invariance locale ou encore invariance de jauge.

Telle qu'elle, la dérivée partielle ∂_μ ne permet pas cette invariance. Nous sommes amenés à la modifier en ajoutant un autre champ $A(x)$ et une nouvelle dérivée D_μ intégrant les règles de couplage:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - i.A_\mu(x)$$

Et poser:

$$A_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$$

Quand:

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi(x) e^{i\alpha(x)}$$

Le champ $A(x)$ que nous avons introduit s'appelle le potentiel électromagnétique.

Avec D_μ et $A_\mu(x)$ dont la définition est rappelée ci-dessous, le lagrangien devient:

$$L(x, \alpha) = \frac{1}{2} [D_\mu e^{i\alpha(x)} \Phi(x)]^* [D^\mu e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] + \frac{1}{2} m^2 [e^{-i\alpha(x)} \Phi^*(x) e^{i\alpha(x)} \Phi(x)]$$

$$D_\mu \Phi(x) \rightarrow \partial_\mu \Phi(x) - iA_\mu(x) \Phi(x) \text{ et } A(x) \rightarrow A(x) + \partial_\mu \alpha(x) \text{ si } \Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x) \quad (6.8)$$

$$\begin{aligned} D_\mu [e^{i\alpha(x)} \Phi(x)] &\rightarrow \partial_\mu \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} + i \cdot \Phi(x) \cdot \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} - i \cdot A_\mu(x) \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - i \cdot \Phi(x) \partial_\mu \alpha(x) e^{i\alpha(x)} \\ &= \partial_\mu \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} - i A_\mu(x) \Phi(x) \cdot e^{i\alpha(x)} = e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi(x) \end{aligned}$$

Car le 2^{ième} et le 4^{ième} terme s'annulent. On peut alors mettre en facteur $e^{i\alpha(x)}$.

Le terme conjugué où $\Phi^*(x) \rightarrow \Phi(x)^* e^{-i\alpha(x)}$, donne $e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \Phi(x)]^*$.

Le produit $D_\mu D^\mu = e^{i\alpha(x)} D_\mu \Phi(x) e^{-i\alpha(x)} [D^\mu \Phi(x)]^* = D_\mu \Phi(x) [D^\mu \Phi(x)]^*$ est invariant.

Nota : La position de l'indice μ dénote la convention de sommation d'Einstein. En espace de Minkowski on peut abaisser ou élever sans que cela change le résultat (ce qui ne serait pas le cas en relativité générale)

Comparaison avec la relativité générale

- Le formalisme que nous avons utilisé est du même type que celui de la relativité générale où, pour exprimer le couplage d'une particule avec le champ gravitationnel (ce qui va influencer sur sa dynamique), on remplace l'opérateur dérivée partielle : $\partial/\partial x^\mu$ qu'on note, en général, de manière abrégée: ∂_μ
- Par une dérivée covariante $\nabla_\nu = \partial_\nu + \Gamma^\lambda_{\nu\mu}$
- Où le terme $\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ (symbole de Christoffel qui dépend seulement de la métrique et de ses dérivées) va introduire le couplage avec le champ gravitationnel.
- Par exemple pour la dérivée covariante d'un vecteur V^μ , cela s'écrit:

$$\bullet \nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\lambda\nu} V^\lambda = T^\mu_\nu$$

- Il faut sommer sur l'indice λ . Le résultat est un tenseur (mixte dans ce cas).

Tout cela a des allures de passe-passe où, à la fin, le magicien sort le lapin du chapeau. Mais qu'avons-nous fait?

Nous avons voulu rendre la loi du champ électronique de la particule chargée invariante par un changement local de phase en demandant à son lagrangien d'être invariant par cette transformation. Pour aboutir à cela nous avons été conduits à introduire:

D'une part, un nouveau type de dérivée qui prend en compte le couplage avec un nouveau champ que nous identifié comme étant le champ électromagnétique, comme en relativité générale où la dérivée covariante prend en compte le couplage avec le champ gravitationnel, ce qui montre la parenté des deux formalismes.

D'autre part, une loi de transformation de ce nouveau champ lorsqu'on opère un changement de phase.

Cela définit le nouveau, le champ électromagnétique, avec sa loi de couplage au champ électronique.

Nous constatons que c'est la symétrie de jauge, imposant une invariance de jauge au lagrangien décrivant la matière chargée, qui a conduit à introduire le champ électromagnétique avec ses lois de couplage à la matière chargée.

Le groupe de jauge de l'électromagnétisme est $U(1)$

L'invariance de jauge par rotation locale de la phase, associée à l'interaction électromagnétique, que nous avons démontrée, correspond à une symétrie associée au groupe $U(1)$ des rotations à 1 degré de liberté. Autrement dit, le champ électrique ne dépend pas de la phase. On dit aussi qu'il est invariant par multiplication par un nombre complexe.

Le groupe de symétrie de l'électrodynamique est donc le groupe $U(1)$.

L'unification de l'interaction électromagnétique avec l'interaction faible dans l'interaction électrofaible va faire intervenir un autre groupe de rotations, celui dans l'espace tridimensionnel appelé $SU(2)$, que nous allons introduire. Le groupe de l'interaction électrofaible sera $U(1)SU(2)$.

Diagrammes de Feynman

La manière habituelle de description des couplages par échange de particules utilise les diagrammes de Feynman, un des contributeurs majeurs à la QED. La figure ci-jointe montre un tel diagramme correspondant à l'interaction de 2 électrons par échange d'un photon.

Nous savons de l'étude de la désintégration du neutron qu'il existe une autre interaction plus faible que l'électromagnétisme. C'est à cette "interaction faible" que les neutrinos sont sensibles, ce qui permet leur détection expérimentale. Cependant un neutrino de 1 Mev (énergie principalement cinétique) interagit si faiblement avec la matière que son trajet moyen d'interaction est d'environ 1 année lumière dans la matière, ce qui rend leur détection difficile.

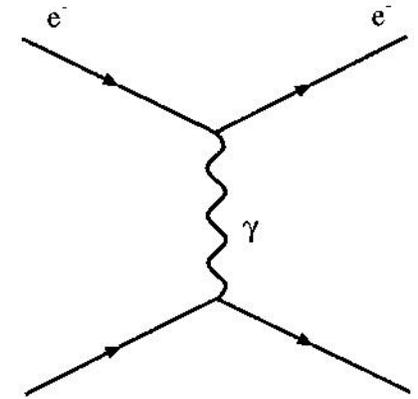
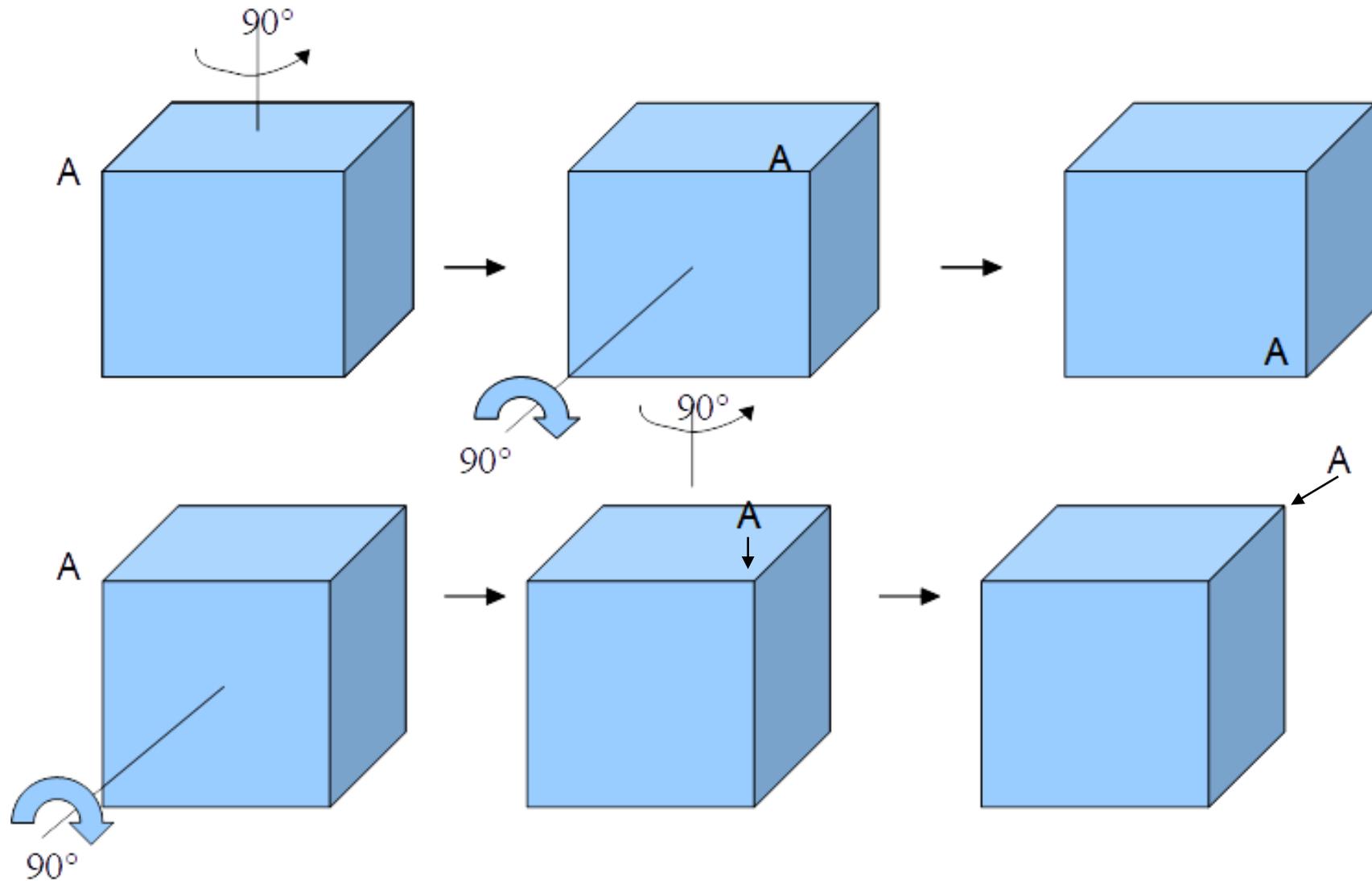
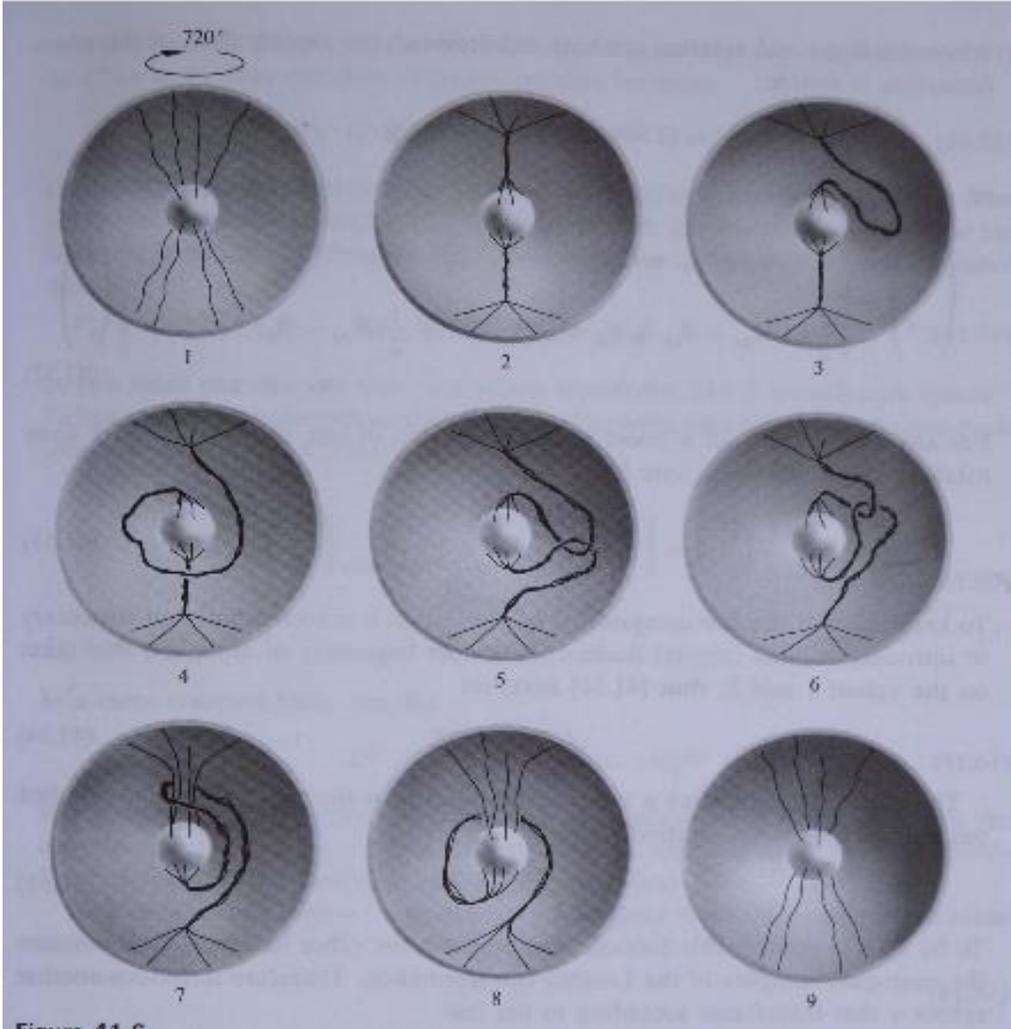


Diagramme de Feynman représentant la diffusion de deux électrons via un échange de photon

La non commutativité des rotations spatiales



Rotations spatiales et spineurs

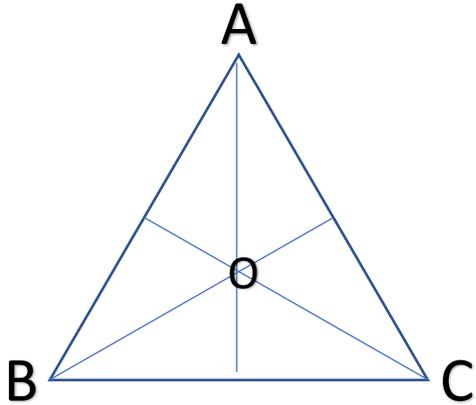


La sphère centrale est attachée à une cavité par huit élastiques, (le nombre huit est un exemple, il n'a pas d'importance). Ces liens sont bien séparés au départ comme la première image de la figure le montre. On applique à la sphère centrale une rotation de 720° (4π radians). Ce faisant, on est passé par 360° (un tour où les brins étaient déjà emmêlés) mais on a continué dans le même sens de rotation pour réaliser un deuxième tour ce qui procure un emmêlement 2 fois plus grand en apparence. En maintenant la boule centrale fixe, on réalise les opérations décrites sur la figure qui permettent de démêler les liens élastiques. On démontre que si on s'était limité à un tour (rotation de 360°), il n'aurait pas été possible de démêler les liens en maintenant la sphère centrale fixe. Ceci atteste que c'est bien le groupe $SU(2)$, de période 4π radians qui est le groupe physique des rotations dans l'espace.

Cité dans « Gravitation , éditeur Freeman» de Charles W. Misner, Kip S. Thorne et John Archibald Wheeler, p. 1149.

Nota: Je n'ai pas fait l'opération, si quelqu'un a une maquette qui permet de la faire, je suis intéressé.

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral



| → | I | R1 | R2 | SA | SB | SC |
|----|----|----|----|----|----|----|
| I | I | R1 | R2 | SA | SB | SC |
| R1 | R1 | R2 | I | SB | SC | SA |
| R2 | R2 | I | R1 | SC | SA | SB |
| SA | SA | SC | SB | I | R2 | R1 |
| SB | SB | SA | SC | R1 | I | R2 |
| SC | SC | SB | SA | R2 | R1 | I |

Ce groupe possède 6 éléments: L'identité I, les 2 rotations R1 et R2 de centre O d'angle $2\pi/3$ et $4\pi/3$, les 3 symétries SA, SB, SC autour des hauteurs issues des points A, B, C. La loi multiplicative du groupe est donnée dans le tableau ci-dessus. En fait, ce groupe est celui des permutations des 3 éléments a, b, c; à savoir: abc, bca, cab, acb, bac, cba.

Il n'y a que trois représentations.

1- Tous les éléments du groupe sont représentés par 1 (représentation triviale)

2- I et les rotations sont représentées par 1 et les symétries par -1.

3- Une représentation par 6 matrices (2 x 2).

Les représentations 1 et 2 sont de dimension 1, la représentation 3 est de dimension 2. La représentation 2 montre la différence de nature entre les rotations et les symétries. **Les 3 éléments I, R1 et R2 forment un sous-groupe "distingué" caractéristique des automorphismes du groupe.**

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

Comme le groupe des racines (a, b, c) de l'équation du 3^{ième} degré, qui peut se mettre sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c) = 0$, est insensible aux permutations de a, b, c, il est le groupe des permutations des racines (a, b, c) de l'équation.

Il est le même que le groupe de symétrie du triangle équilatéral. On voit que 2 objets très différents, un triangle et une équation, sont régis par même groupe!

Son sous-groupe distingué (I, R1, R2), où chaque élément est égal à son conjugué par les 6 éléments du groupe du triangle équilatéral, joue un rôle fondamental dans la possibilité de résolution de l'équation du 3^{ième} degré. L'existence d'un tel sous-groupe est caractéristique d'une symétrie interne du groupe lui-même, ce qui n'a rien de général.

Si la solution aux équations du 2^{ième} degré étaient connues dès l'antiquité (Babylone, vers -1800), il faudra attendre le 16^{ième} siècle pour trouver la solution à celle du 3^{ième} degré $x^3+ax^2+bx+c = 0$. La solution s'appuyait sur la possibilité de trouver une équation du 2^{ième} degré, dite résolvante, qu'on savait résoudre.

Le groupe de symétrie du triangle équilatéral (compléments)

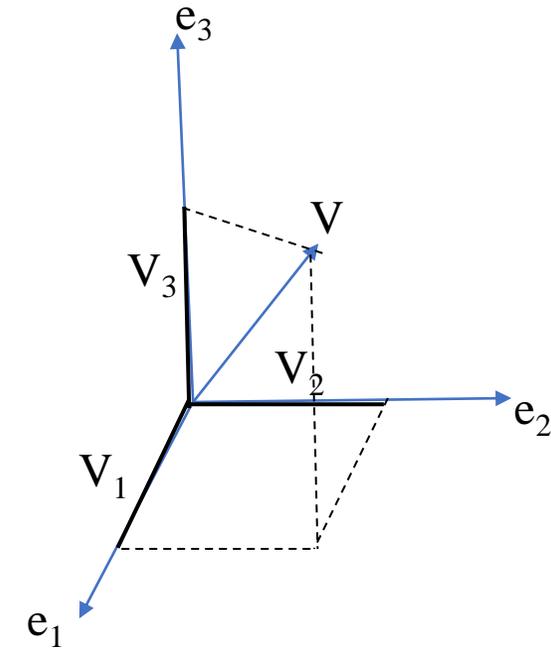
En posant $y = x+a/3$, on obtenait $y^3+py+q = 0$ et avec $y = u+v$, on se ramenait à une équation du deuxième degré pour déterminer u et v et, en conséquence, y .

Celle du quatrième degré qu'on pouvait mettre sous la forme $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$ fut résolue un peu plus tard par une méthode similaire car son groupe des permutations des racines (a,b,c,d) comportait un sous-groupe distingué, le sous-groupe de Klein, permettant de trouver une équation résolvante de degré inférieur.

Ainsi par récurrence on pensait, par cette méthode, résoudre toutes les équations algébriques de degré quelconque. Mais l'équation du 5^{ième} degré résista à toutes les tentatives de résolution par cette méthode et c'est E. Galois qui a montré pourquoi. Le groupe de symétrie des racines de l'équation du 5^{ième} degré, a contrario de ceux associés aux équations de degré inférieurs, ne comportait pas de sous-groupe distingué, ce qui était nécessaire pour que la méthode fonctionne!

Groupe de Lie $SO(3)$ et $SU(2)$

- Pour passer des groupes finis aux groupes continus, comme celui des rotations, on ne peut pas transposer directement, en général, ce qui a été établi.
- Nous nous intéresserons aux groupes continus compacts, comme les rotations, où les paramètres du groupe varient dans un domaine limité par deux bornes finies, à la différence du groupe des translations, par exemple, où le paramètre peut prendre une valeur infinie.
- Ces groupes sont les plus proches des groupes finis, où presque tout se transpose.
- Un point important est de définir sur quoi ces groupes s'appliquent. Dans notre exemple nous considérerons les rotations de vecteurs \mathbf{V} , définis dans un espace euclidien à 3 dimensions, en géométrie analytique, ce qui suppose qu'on ait défini une base de 3 vecteurs \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 , linéairement indépendants qu'on considère orthonormés pour définir ses composantes V_1 , V_2 , V_3 .



Matrices définissant la rotation

- On considère les rotations infinitésimales. Comme on peut définir n'importe quelle rotation en les enchainant, elles doivent contenir toute l'information que nous recherchons. Comme au niveau infinitésimal, $\sin \delta\theta \approx \delta\theta$ et $\cos \delta\theta \approx 1$, La matrice de rotation \mathbf{R} de $\delta\theta$ autour de l'axe défini par \mathbf{e}_3 va s'écrire:

$$\mathbf{R} = \begin{vmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ \delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\delta V_i = V'_i - V_i$, où V_i ($i = 1, 2, 3$) sont les composantes du vecteur \mathbf{V} dans la base définie $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ avant rotation et V'_i les composantes après, on trouve:

$$\begin{vmatrix} \delta V_1 \\ \delta V_2 \\ \delta V_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{vmatrix}$$

Si on définit $\mathbf{J}_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Alors on a : $\delta V_i = i \cdot \delta\theta \sum_{j=1}^{j=3} (J_3)_{ij} V_j$

Matrices définissant la rotation

- Pour les autres axes de rotations, avec les valeurs de J_1 et J_2 on a la même relation:

$$J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

On peut vérifier qu'en enchaînant des rotations infinitésimales $\delta\theta = \theta/N$ avec N tendant vers l'infini on retrouve bien, par exemple par le développement en série des fonctions trigonométriques, la matrice décrivant la relation classique pour une rotation de θ .

$$\begin{vmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Les relations se généralisent à tout axe \mathbf{n} : $R(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{n}) = e^{i.\boldsymbol{\theta}.J} = e^{i(\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3)}$

L'algèbre de Lie du groupe des rotations appelé $SO(3)$ est définie par:

$$[J_i, J_j] = [J_i, J_j] - [J_j, J_i] = i \cdot \sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{ijk} J_k$$

- Les $i\epsilon_{ijk}$ sont les constantes de structure du groupe $SO(3)$.

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (2, 3, 1) \text{ ou } (3, 1, 2), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

ε_{ijk} est le symbole de Levi-Civita totalement antisymétrique sur ses indices.

L'algèbre de Lie est la relation la plus importante contenant l'information maximale concernant le groupe des rotations dans l'espace à 3 dimensions.

Elle va permettre d'aller au-delà du groupe qui nous a permis de la définir qui en est une représentation pour les vecteurs à trois dimensions, appelée $SO(3)$

S = Spécial

O = Orthogonal – Matrice de dimension 3 dont le transposé est égal à l'inverse.

3 = Matrice de dimension 3

Les matrices J_i sont appelés les générateurs infinitésimaux du groupe des rotations spatiales. Les relations de commutation entre ces générateurs forment l'algèbre de Lie du groupe.

Dans un espace tridimensionnel les objets qui se transforment lors d'une rotation par les matrices de $SO(3)$ sont appelés des vecteurs; $SO(3)$ est la représentation vectorielle du groupe des rotations d'un espace à 3 dimensions.

Un vecteur pour un physicien est plus qu'un élément d'un espace vectoriel, caractérisée par une structure linéaire, c'est un objet qui engendre la représentation $SO(3)$ du groupe des rotation.

Sa nature est révélée par la manière dont il se transforme, ce qui n'est ni évident ni trivial, a priori.

On va rechercher d'autres représentations de cette algèbre de Lie. Comme la représentation de dimension 1 est triviale nous la dédaignerons.

- Il existe un ensemble de matrices 2 x2 qui satisfont à la 1'algèbre de Lie que nous avons définie à partir des rotations dans l'espace tridimensionnel. Elles constituent une représentation de dimension 2 de cette algèbre de Lie.
- Elles sont notées $\sigma_1/2, \sigma_2/2, \sigma_3/2$.

$$\sigma_1/2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_2/2 = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} \quad \sigma_3/2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$$

- En effet on a : $\left[\frac{\sigma_i}{2}, \frac{\sigma_j}{2} \right] = i \cdot \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \frac{\sigma_k}{2}$
- Les matrices U de la représentation sont:
- $U(\boldsymbol{\theta}) = e^{i \cdot \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma} / 2} = \begin{vmatrix} \cos \frac{\theta}{2} + i \cdot n_z \sin \frac{\theta}{2} & (i \cdot n_x + n_y) \sin \frac{\theta}{2} \\ (i \cdot n_x - n_y) \sin \frac{\theta}{2} & \cos \frac{\theta}{2} - i \cdot n_z \sin \frac{\theta}{2} \end{vmatrix}$
- Le vecteur \mathbf{n} dont les composantes sont n_x, n_y, n_z est l'axe de la rotation qui peut être quelconque. Quand ils sont des vecteurs ($\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\sigma}$) sont notés en caractères gras.

Représentation de dimension 2 du groupe des rotations, SU(2), spineurs

- L'ensemble de ces matrices U constituent le groupe SU(2).
- S → Spécial: déterminant des matrices = +1
- U → Unitaire $U^\dagger = U^{-1}$. La matrice adjointe est égale à la matrice inverse
- 2 → Matrices 2 x 2
- On appelle spineurs les objets à 2 composantes qui engendrent la représentation SU(2) du groupe des rotations. Ainsi:
 - $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow z' = \begin{pmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{pmatrix} = U(\boldsymbol{\theta}) \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$
- Notons que $\boldsymbol{\theta}$ en gras est un vecteur orienté et colinéaire de l'axe de rotation.
- Dans le groupe SU(2), l'argument angulaire des matrices U n'est pas θ mais $\theta/2$. Une rotation de 4π et non pas de 2π , comme dans SO(3), est donc nécessaire pour revenir à l'état initial.
- Comme pour les vecteurs, le caractère spinoriel d'un doublet est révélé par les rotations.
- Ce groupe SU(2) sera celui qui supportera l'interaction faible, ce qui implique que cette interaction faible est invariante de jauge par toutes les rotations spatiales

Compléments sur les groupes des rotations

Vecteurs et spineurs

Rotation dans l'espace tridimensionnel euclidien

- Le groupe des matrices $R(\boldsymbol{\theta}) = e^{i\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}} = e^{i(\theta_1 J_1 + \theta_2 J_2 + \theta_3 J_3)}$ est appelé $SO(3)$. [1]
- S = spécial $\rightarrow \det R = +1$
- O = orthogonal réel $\rightarrow R$ est une matrice à coefficients réels vérifiant ${}^tR = R^{-1}$.
- 3 = R est une matrice 3x3.
- $\boldsymbol{\theta}$, noté vectoriellement désigne $n\boldsymbol{\theta}$ où n est le vecteur unitaire colinéaire de l'axe de la rotation d'angle θ , scalaire multiplicatif de 0 à 2π . \mathbf{J} , noté vectoriellement, désigne la base constituée des 3 matrices J_1, J_2, J_3 que nous avons définies dans ce document. Le produit scalaire $\boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J}$ figurant dans l'exposant de $R(\boldsymbol{\theta})$ s'écrit alors :

$$\bullet \boldsymbol{\theta}\cdot\mathbf{J} = \sum_{i=1}^3 \theta_i \cdot J_i$$

- où $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ sont les composantes du vecteur $n\boldsymbol{\theta}$, sur les axes de rotation x, y, z associés aux matrices J_1, J_2, J_3 où $\theta_i \cdot J_i$ qui est la matrice J_i multipliée par le scalaire θ_i est une matrice.
- [1] C'est cette loi qui fait qu'un triplet de nombres représente un vecteur, en physique. La relation $R(\boldsymbol{\theta})$ qui désigne une rotation d'angle θ autour de l'axe n ne signifie pas qu'on enchaîne une rotation d'angle θ_1 autour de l'axe x puis θ_2 autour de l'axe y puis θ_3 autour de l'axe z , car ces rotations ne commutent pas.

Rotations et spineurs

- L'ensemble des trois J_i obéissent à la loi de commutation,
- $[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k$ (avec $i^2 = -1$ et ϵ_{ijk} symbole Levi-Civita)
- où $[J_i, J_j] = (J_i * J_j) - (J_j * J_i)$, où le symbole $*$ désigne le produit matriciel :

- Avec :

$$J_x = J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} \quad J_y = J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad J_z = J_3 = \begin{vmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Par exemple pour $i=1, j=2$: $[J_1, J_2] = (J_1 * J_2) - (J_2 * J_1) = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{123} J_3 = iJ_3$

- $J_1 * J_2 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$
- $J_2 * J_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{vmatrix} * \begin{vmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

Rappelons que pour l'application d'une combinaison d'opérateurs, A et B on les applique de la gauche vers la droite : $A.B \rightarrow B[A(\theta)]$.

- Groupe SU2, Spécial, Unitaire ($U^\dagger = U^{-1}$), de dimension 2, matrices (2x2)

L'ensemble des trois J_i obéissent à la loi de commutation,

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k \quad (\text{avec } i^2 = -1 \text{ et } \epsilon_{ijk} \text{ symbole Levi-Civita})$$

Ceci forme l'algèbre de Lie du groupe non abélien des rotations et le caractérise. Cette loi définit aussi ses constantes de structure $i\epsilon_{ijk}$

- Le groupe SU2 où les J_i sont des matrices complexes (2x2) est le groupe associé à la représentation de dimension 2 du groupe des rotations.
- Il se révèle être le recouvrement universel du groupe non abélien des rotations spatiales SO3 (Spécial, Orthogonal, 3D).
- Retour à l'état initial par rotation 4π .
- Les objets manipulés sont des spineurs ayant deux composantes à la différence du groupe SO3 qui manipule des vecteurs.