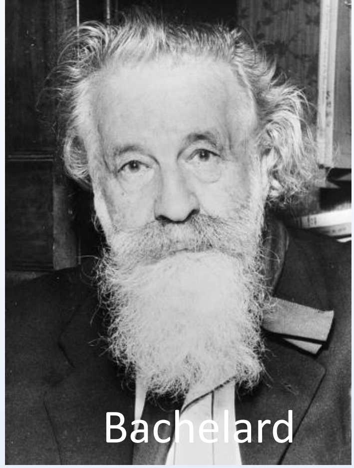
Quand les mathématiques révèlent la face cachée de la physique

En 1961, Newman et Penrose ont proposé un formalisme spinoriel pour la relativité générale. Ce formalisme mettra l'accent sur le rôle structurel de la lumière en relativité. Étonnamment, une telle approche a été préfigurée par E. Cartan 40 ans auparavant !

L’algèbre rassemble toutes les informations



- Dans son livre, « Le nouvel esprit scientifique » [1], G. Bachelard, après avoir considéré les relations d’interaction entre ce qu’il appelle « le réalisme » lié à l’expérience et le « rationalisme », lié à notre esprit, élaborant des théories pour rendre compréhensible le monde physique, déclare :
- «Comme les relations entre les objets ne sont pas substantielles mais relationnelles, c’est l’algèbre qui regroupe toutes les relations. Mais si les objets ne sont pas les racines des relations, on peut se demander d’où viennent ces relations.»

L’algèbre rassemble toutes les informations

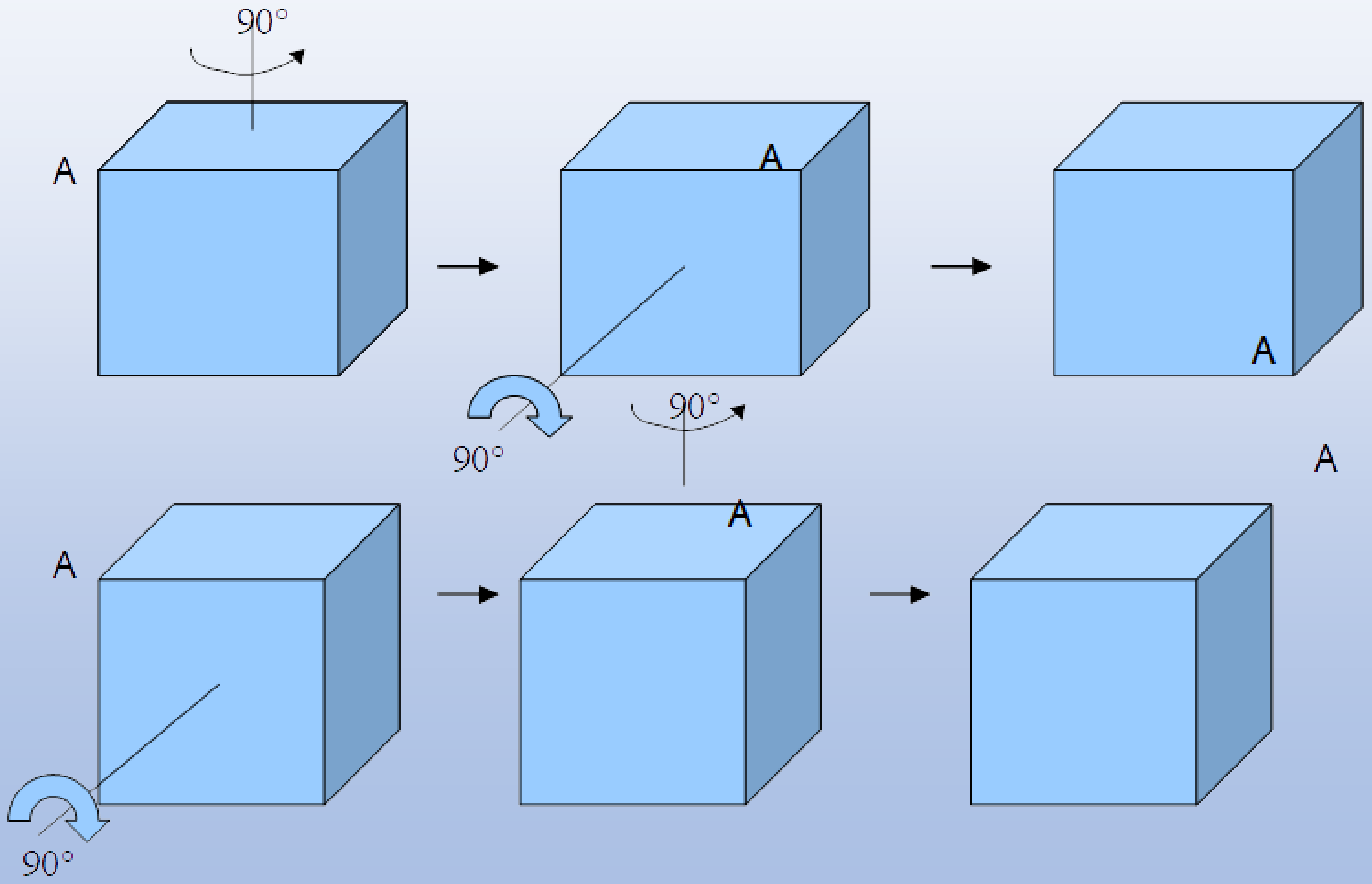
Ce commentaire visait principalement les mathématiques, mais cela vaut également pour le rôle des mathématiques dans certaines lois fondamentales de la physique..

Ainsi, en mathématiques, le groupe compact de rotations dans l’espace euclidien 3D agissant sur des vecteurs est appelé SO(3).

Un vecteur récupère sa position après une rotation de 2π radians autour d’un axe dans l’espace. Mais qu’en est-il quand on combine des rotations autour d’axes différents ?

Il existe 3 axes linéairement indépendants en 3D.

La non commutativité des rotations spatiales



L’algèbre rassemble toutes les informations

De plus la topologie de ce groupe n’est pas simplexe.

Si nous écrivons l’algèbre de Lie des trois générateurs de ce groupe, nous découvrons qu’il existe d’autres solutions.

L’algèbre de Lie du groupe des rotations appelé SO(3) est définie par:

$$[J_i, J_j] = [J_i, J_j] - [J_j, J_i] = i.\sum_{k=1}^{k=3} \epsilon_{ijk}\, J_k$$

- Les J_m (m =i,j,k) sont les générateurs infinitésimaux des rotations (matrices 3x3) dans l’espace 3D, $i\epsilon_{ijk}$ sont les constantes de structure, où ϵ_{ijk} est le symbole de Levi Civita

L’algèbre rassemble toutes les informations

Une solution 2D, le groupe SU(2), (matrices 2x2), agissant sur les spineurs, où ils retrouvent leur position après une rotation de 4π au lieu de 2π, a une topologie simplexe et est donc plus fondamentale que SO(3), voir [2] pour plus d’info.

Cela montre que l’algèbre de Lie, définissant les relations entre les générateurs du groupe qui sont les objets fondamentaux régissant les rotations possibles dans cet espace, inclut toutes les informations sur la structure de la rotation dans cet espace.

L’algèbre rassemble toutes les informations

Le groupe SO(3) permettant de construire l’algèbre de Lie n’était qu’un exemple. L’algèbre de Lie a extrait sa structure relationnelle fondamentale. La théorie électrofaible, qui repose sur le produit O(1). SU(2) prouve que SU(2) est plus physique que SO(3).

Illustration des propriétés du groupe SU(2)

Ces figures proviennent du livre « Gravitation » de C.W Misner, K. S.Thorne et J.A Wheeler [3]

1148 41. SPINORS

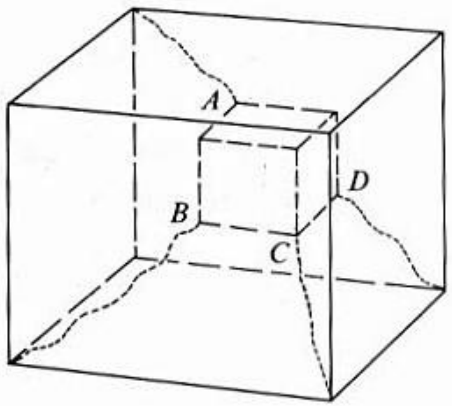


Figure 41.5.
"Orientation-entanglement relation" between a cube and the walls of a room. A 360° rotation of the cube entangles the threads. A 720° rotation might be thought to entangle them still more—but instead makes it possible completely to disentangle them.

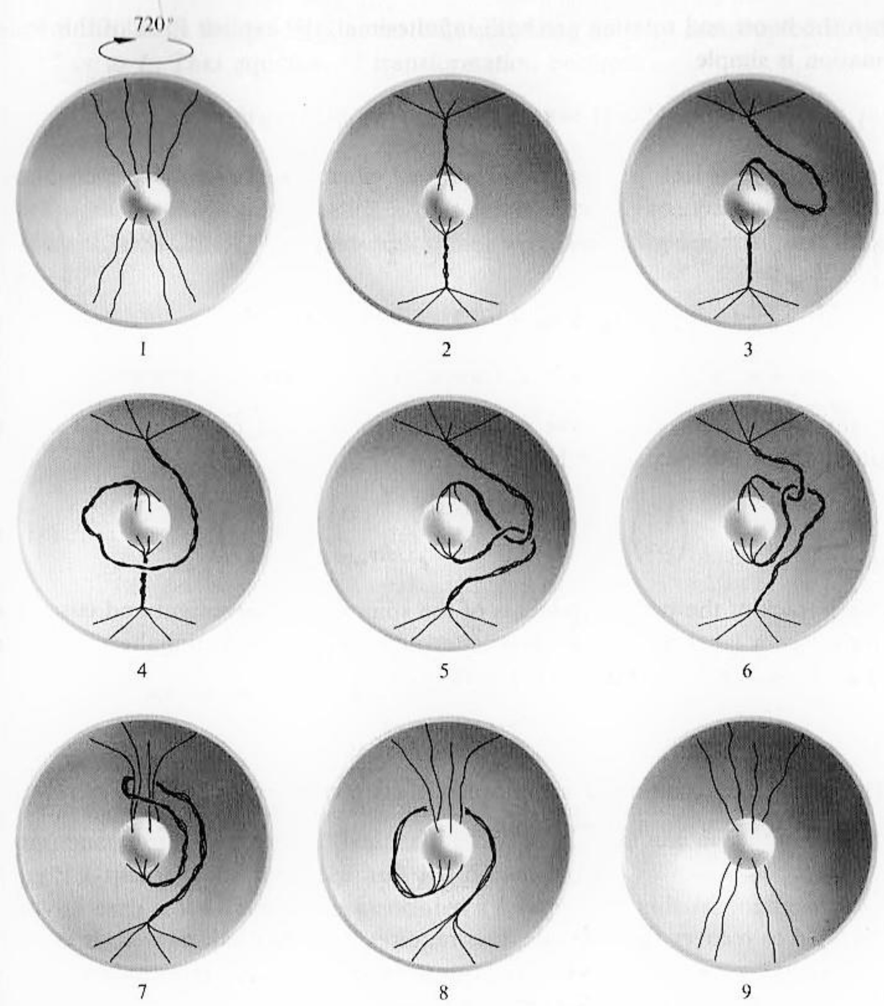


Figure 41.6.
An object is connected to its surroundings by elastic threads as in Figure 41.5. (Eight are shown here; any number could be used.) Rotating the object through 720° and then following the procedure outlined (Edward McDonald) in frames 2–8 (with the object remaining fixed), one finds that the connecting threads are left disentangled, as in frame 9 (lower right).

Mathématiques et physique

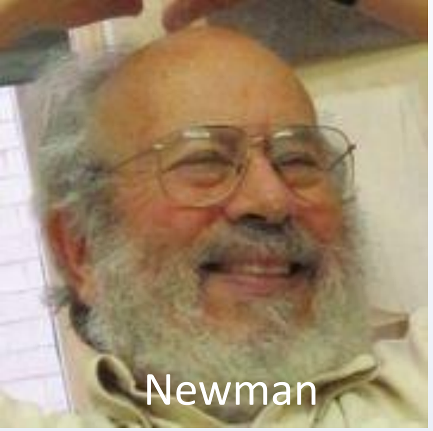
- La relation des mathématiques avec la physique est un sujet largement débattu. De nombreux articles ont été écrits à ce sujet, je développe cela dans la 3ième partie (philosophique) de mon livre. « Vous avez dit Big Bang? ».
- Après l’illustration des arguments de G. Bachelard, prenons un exemple en relativité, à savoir, le formalisme de Newman-Penrose (NP) pour montrer comment le formalisme mathématique peut être d’une grande aide pour comprendre la phénoménologie physique.

Introduction au formalisme NP

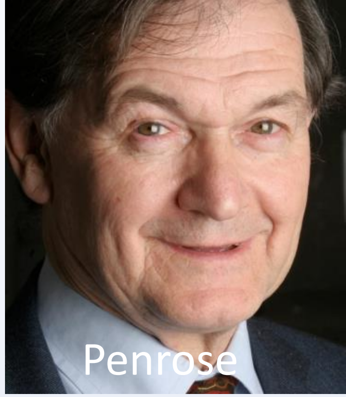
- Une bonne introduction au formalisme de Newman-Penrose (NP) est donnée par S. Chandrasekhar dans [4]: « Le formalisme de Newman-Penrose est un formalisme tétrade avec un choix particulier des vecteurs de base.
- Le choix qui est fait est une tétrade de vecteurs nuls l, n, m et m^* dont l et n sont réels et m et m^* sont conjugués complexes l'un de l'autre.

Introduction au formalisme NP

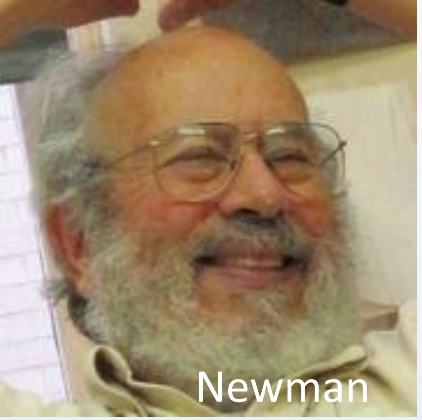
La nouveauté du formalisme, lorsqu'il a été proposé pour la première fois par Newman et Penrose en 1962 [5], résidait précisément dans leur choix (inhabituel et surprenant!) d'une base nulle : c'était une rupture par rapport au choix d'une base orthonormale qui prévalait jusqu'alors.



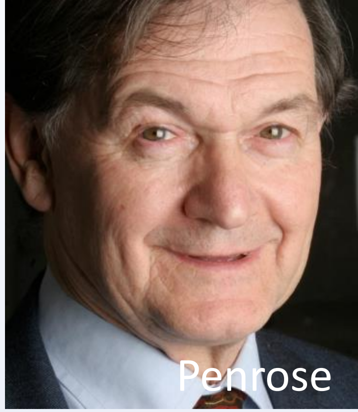
Introduction au formalisme NP



- Penrose a été amené à envisager l'introduction d'une base nulle, incorporant des spineurs dans l'analyse de la relativité générale, pour une raison essentielle. En effet, sa motivation pour le choix d'une base nulle était fondée sur son intime conviction que l'élément essentiel d'un espace-temps est sa structure de **« cône de lumière », régissant la causalité, qui rend essentielle** l'introduction d'une base de type spineur.



Introduction au formalisme NP



Et il apparaît que la structure du cône de lumière de l'espace-temps des solutions des trous noirs de la relativité générale est exactement celle qui rend le formalisme de Newman-Penrose plus efficace pour saisir les symétries inhérentes à ces espace-temps et révéler leur richesse analytique. S. Chandrasekhar souligne que ce formalisme est particulièrement efficace pour les solutions du trou noir (plus généralement des solutions de type D dans la classification de Petrov-Pironi [6,7]).

Introduction au formalisme NP

- Le mot « lumière » est un terme générique désignant les ondes électromagnétiques ou tout phénomène dont la vitesse est celle de la lumière, c’est-à-dire également les ondes gravitationnelles.
- Rigoureusement, c’est le fait que, pour se conformer au principe de relativité, il existe un invariant de vitesse dans le formalisme de la relativité, agissant comme une limite supérieure pour toute phénoménologie physique, qui est la contrainte structurelle physique.

Introduction au formalisme NP

Par conséquent, ce n'est pas la lumière elle-même qui régit la causalité en relativité, mais le fait qu'il existe une limite supérieure de vitesse, la lumière n'étant qu'une sorte de messager voyageant à cette limite supérieure de vitesse.

C'est cette limite qui invalide l'espace et le temps universels de la mécanique newtonienne et les remplace par une nouvelle structure « l'espace-temps » de géométrie « hyperbolique » qui, selon Minkowski (1907), réduit le temps et l'espace à en n'être que ses « ombres (apparences)».

Formalisme de Newman-Penrose

- Dans ce nouveau formalisme, le tenseur métrique n'est plus celui de la relativité restreinte :

-1	**0**	**0**	**0**
0	**1**	0	0
0	0	**1**	0
0	0	0	**1**

- Mais, au lieu d'un tenseur à valeur de spineur, voir [8] pour la démonstration.

0	**-1**	**0**	**0**
-1	0	0	0
0	0	0	**1**
0	0	**1**	0

Morphisme présenté par le formalisme NP

- Ceci est mathématiquement parfaitement défini, mais il est difficile d'en donner une représentation physique. Les vecteurs nuls sont tangents aux chemins de la lumière dont le paramètre affine est nul ($ds^2 = 0$).
- Comme un vecteur nul est orthogonal à lui-même, il n'y a que 3 vecteurs nuls orthogonaux indépendants dans l'espace-temps 4D.
- C'est pour obtenir 4 degrés de liberté que l'un d'eux est complexe dans le formalisme NP.

Morphisme présenté par le formalisme NP

Curieusement, un tel formalisme, qui semble très obscur, va simplifier les équations dans de nombreux cas, ce qui signifie qu’il existe certainement un morphisme entre la structure (symétries) de ce formalisme et la structure de la phénoménologie qu’il décrit.

C’est une des caractéristiques des mathématiques de nous éclairer sur la structure des objets qu’elles modélisent.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Premier exemple

- Dans les trous noirs de Kerr [9] ou Kerr Newman [10], dans ce formalisme NP, l’espace-temps peut être entièrement défini par un seul scalaire complexe de Weyl, qui contient toutes les informations sur cet espace-temps, au lieu de plusieurs dans tous les autres formalismes.
- Rappelons qu’un tel espace-temps de type D est entièrement défini par le tenseur de Weyl, qui est le tenseur de Riemann dans le vide.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Premier exemple (suite)

- Le tenseur de Weyl a 256 composantes, mais selon ses symétries, il n’a que dix valeurs indépendantes, généralement représentées par 5 scalaires complexes (définissant 10 valeurs), appelés scalaires de Weyl.
- Le fait qu’un seul d’entre eux soit nécessaire dans le formalisme NP montre qu’il est le plus efficace pour définir ce type d’espace-temps.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple

En relativité restreinte, nous pouvons également utiliser le formalisme NP. La première étape consiste à écrire la métrique de Minkowski (coordonnées t, x, y, z) :

- $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$

- en coordonnées nulles en définissant :

$$U = a(t+x),\ V = a(t-x),\ W = a(y+i.z),\ W^* = a(y - i.z),$$

- où $a = 2^{-1/2}$, est un facteur de normalisation et où $i^2 = -1$.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple (suite)

La métrique devient : $ds^2 = -2dUdV + 2dW.dW^*$

Dans la métrique de Minkowski, le caractère spatio-temporel du ds^2 était généré par la combinaison de coordonnées spatiales (x, y, z, de signature « + ») et d'une coordonnée temporelle (t, de signature « - ») dans la forme bilinéaire.

Ici nous avons 4 coordonnées de même type (nul).

Cela implique que pour satisfaire le caractère spatio-temporel du ds^2, les coordonnées nulles ont un caractère spatio-temporel.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple (suite)

Ceci est évident pour U = a(t+x) et V= a(t-x) mais plus subtil pour W= a(y+i.z) et W* = a(y-i.z).

En fait, i.z a un caractère « temporel » du fait qu'il est imaginaire (au carré il aura la signature « - » de type temps).

Cette propriété d'homogénéité permet de comprendre pourquoi le formalisme de Newmamm-Penrose est plus efficace en relativité générale, ses éléments sont nativement de même nature que l'objet qu'ils représentent.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Deuxième exemple (suite)

Un boost de paramètre φ telle que $v/c = \tanh \varphi$, où v est la vitesse relative et une rotation du paramètre θ, sont définies par des opérateurs qui sont une matrice 4x4.

Comparons ces opérateurs dans les formalismes de Minkowski et Newmann-Penrose.

Le formalisme NP simplifie les équations

- Dans le formalisme de Minkowski, pour un boost le long de l'axe x et une rotation autour du même axe x, la matrice 4x4 s'écrit habituellement:

cosh(φ)	-sinh(φ)	0	0
-sinh(φ)	cosh(φ)	0	0
0	0	cos(θ)	sin(θ)
0	0	-sin(θ)	cos(θ)

Le formalisme NP simplifie les équations

- Dans le formalisme NP, pour un boost le long de l'axe x et une rotation autour du même axe x, la matrice 4x4 peut être écrite (voir [8] pour la démonstration):
- Le formalisme NP fournit une matrice plus simple et plus symétrique, intégrant, également en relativité restreinte, les symétries de la phénoménologie.

$e^{-\varphi}$	0	0	0
0	e^{φ}	0	0
0	0	$e^{-i\vartheta}$	0
0	0	0	$e^{i\vartheta}$

Les mathématiques révèlent l’efficacité NP

- Comme l’équation d’Einstein est un ensemble d’équations différentielles partielles du second ordre non linéaires, les solutions analytiques ne peuvent être attendues que pour un espace-temps hautement symétrique.
- Au début de la relativité, les solutions ont été établies en utilisant les symétries de l’espace-temps décrites par le ds^2.

Les mathématiques révèlent l’efficacité NP

- La solution de Schwarzschild dans le vide, en 1916, repose sur une forme générique du ds^2 avec une section sphérique d’espace, contrainte par l’équation d’Einstein (le tenseur de Ricci est nul) et la convergence avec l’équation de Newton à l’infini.
- Cette méthode a permis de trouver quelques solutions d’espace-temps hautement symétriques mais n’a pas réussi à trouver la solution des trous noirs en rotation, qui a été trouvée par Kerr 47 ans plus tard!

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP

- Pendant ce temps, d'autres méthodes ont été développées en considérant le tenseur de Weyl (qui est invariant par une transformation conforme), qui spécifie pleinement la courbure de l'espace-temps dans le vide, comme un opérateur agissant sur des bi-vecteurs.
- L'étude des valeurs propres du tenseur de Weyl fournira, alors, une autre approche fructueuse.

Les mathématiques révèlent l’efficacité NP

- Un résultat intéressant est qu’il existe un ensemble de 4 géodésiques nulles (liées aux racines d’une équation quadratique), appelées géodésiques nulles principales qui jouent un rôle structurel dans l’espace-temps, car elles définissent des catégories de structure.
- En effet, les catégories d’espace-temps vides dépendront du nombre de racines différentes.

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP

- Dans les solutions de type D, où la métrique est définie dans le vide (espace-temps conforme vide), il existe 2 racines doubles, l'une correspondant à une classe (congruence) de géodésiques entrantes nulles (allant vers la singularité) et l'autre à une classe (congruence) de géodésiques sortantes nulles (provenant de la singularité).

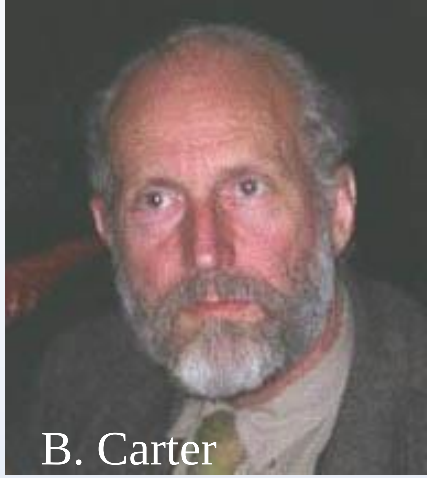
Les mathématiques révèlent l'efficacité NP

- Si le formalisme NP est si efficace pour simplifier les équations décrivant l'espace-temps, ce n'est pas fortuit, c'est parce qu'il s'appuie sur ces classes de géodésiques nulles principales.
- C'est ce que Penrose soupçonnait en supposant que les rayons lumineux (géodésiques nulles) jouaient un rôle essentiel, car ils régissaient la causalité.

Les mathématiques révèlent l’efficacité NP

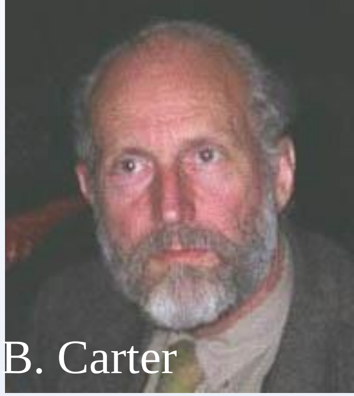
- C’était sa principale motivation dans le formalisme NP.
- C’est parce qu’il y a plus d’informations contenues dans ce formalisme, qu’il est le plus efficace pour définir totalement l’espace-temps.
- La voie suivie par Kerr, telle que racontée par B. Carter dans [11], montre que c’est ce formalisme qui l’a conduit à réussir dans sa recherche d’une solution :

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP



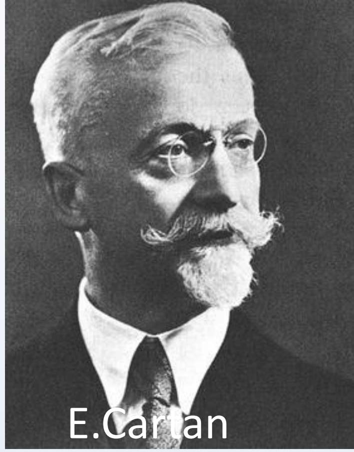
- « Dans tous ces espaces, le tenseur de Weyl est de type D dans la classification de Petrov-Pirani, les deux vecteurs nuls doubles principaux étant donnés par .. (équations)....
- Par la généralisation de Kundt et Trumper du théorème de Goldberg-Sachs, ceux-ci sont intégrables pour donner deux congruences géodésiques nulles sans cisaillement.
- Le premier d'entre eux est entrant le second sortant ...... »

Les mathématiques révèlent l'efficacité NP



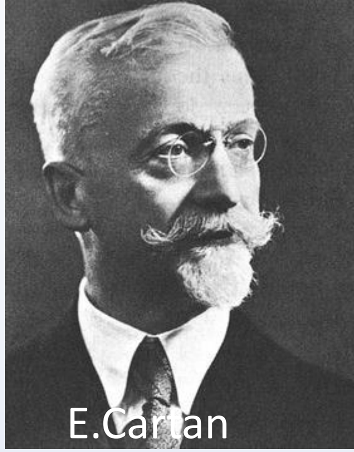
- « C'est en utilisant ces propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en recherchant spécifiquement des solutions non orthogonales aux hyper-surfaces, que les métriques de l'espace vide de la famille des TN en rotation ont été dérivées par Kerr.
- Par la suite, ces métriques ont été dérivées par Kerr et Schild à partir d'une étude systématique de solutions dans le vide dont le tenseur métrique est (localement) la somme d'un tenseur métrique à espace plat et le produit tensoriel d'un vecteur nul avec lui-même. »

Contribution majeure de E. Cartan en 1922



- Dans un article publié à l’Académie des Sciences [12], Elie Cartan, dès 1922, remarque l’intérêt de ce qu’il appelle «l’univers optique» qui appartient à une classe d’espace-temps conformes vides en relativité. Il a remarqué l’existence de classes de géodésiques nulles, appelées géodésiques nulles principales, qui jouent un rôle structurel dans la description de l’espace-temps de Schwarzchild (qui est défini dans le vide).

Contribution majeure de E. Cartan en 1922



- Il a identifié que, dans l'espace-temps de Schwarzschild, ces quatre géodésiques nulles principales réparties en deux classes (chacune est double).
- C'est parce que cet espace-temps est de type D, mais Cartan ne le savait pas car cela sera établi plus de 30 ans plus tard par Petrov et Pirani dans leur classification.
- Malheureusement, sa brillante contribution est tombée dans l'oubli !

Une approche duale en relativité restreinte

- En relativité restreinte (RR), comme tous les référentiels inertiels (galiléens) sont équivalents (pas de repère préféré) habituellement, l’un est choisi comme référence (celui de l’observateur) et pour les autres, leur boost, leur rotation sont décrits de son point de vue.

Une approche duale en relativité restreinte

- La vitesse de la lumière est un invariant, mais la fréquence d’un rayon lumineux émis dans un référentiel est différente dans les autres.
- Comme nous connaissons le rôle structurel de la lumière en relativité et que la vitesse de la lumière est un invariant, cela suggère, en dualité à l’usage, de sélectionner des géodésiques nulles comme référence.

Une double approche en relativité restreinte

- Comme $ds^2 = 0$, le temps propre ne peut pas être utilisé, alors, la quadri-impulsion (four-momentum) p^μ est utilisée comme paramètre affine* sur les géodésiques nulles. Elle dépend de la fréquence du photon d'énergie : $E = h\nu$
- En effet: $p^\mu = E/c = h\nu/c$

- *Rappelons que le paramètre affine permet de repérer un « point » quelconque sur la ligne d'univers par rapport à un point « origine ». Ici ce sera le **nombre de périodes** qui en donnera la mesure et non pas l'intervalle d'espace-temps donnée par le temps propre.

Une double approche en relativité restreinte

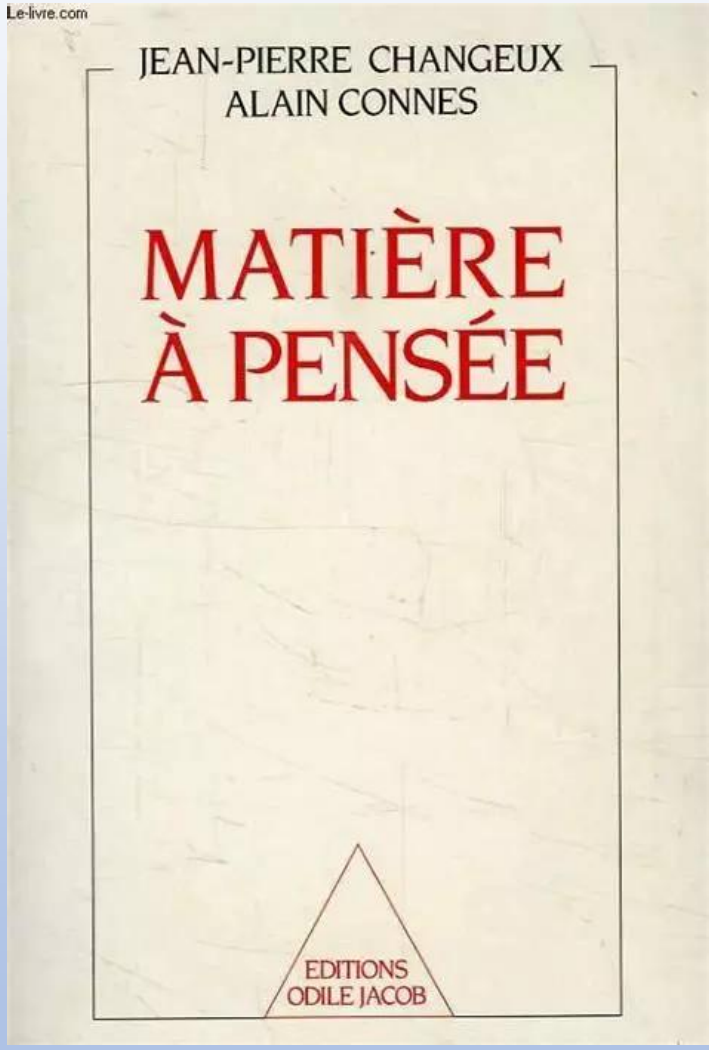
- Dans ce cas, si nous calculons le décalage Doppler f/f_0 entre la mesure de la fréquence dans deux référentiels de vitesse relative v en utilisant l'équation Doppler relativiste avec $v/c = \tanh(\varphi)$, c'est-à-dire $\varphi = \mathrm{argtanh}(v/c)$, voir [8] pour une démonstration, on obtiendra :
  - $\frac{f}{f0} = e^{\varphi}$
- Ce résultat a la même forme que celui donné par le formalisme NP.

Avant de conclure: La nature des mathématiques

- Cela s’inscrit dans le cadre de la nature de la connaissance. Les mathématiques ont été considérées, d’abord, comme le langage du livre dans lequel les lois de la nature sont écrites (Galilée), ensuite, on a plutôt considéré que ces lois étaient écrites dans la syntaxe des mathématiques mais que leur signification (la sémantique) relevait de la physique.
- Ici, nous les avons considérées en tant qu’outil, ce qui rejoint le dernier point, car les mathématiques fournissent des formalismes dont le morphisme supposé avec les lois qu’elles décrivent nous renseigne d’autant plus sur la nature de ces lois, que, in fine, ces lois se révèlent de nature relationnelle.

Avant de conclure: La nature des mathématiques

- Une différence essentielle entre la physique et les mathématiques est que la physique doit « rendre des comptes à l'expérience », ce qui n'est pas le cas des mathématiques.
- Cette propriété des mathématiques conduit au débat de leur existence, en dehors, de toute conscience humaine, débat dont on peut trouver une illustration dans le livre ci-joint entre un mathématicien (A. Connes, médaille Field, et un célèbre neuro-physicien: JP Changeux.



Avant de conclure: La nature des mathématiques

- A. Connes, dans une approche Platonicienne, soutient que les mathématiques ont une réalité propre que nous découvrons au fur et à mesure que nous les étudions. La relation avec l'intelligence humaine est alors éducative : Elles forment et structurent notre esprit au fur et à mesure que notre découverte de cette réalité progresse.
- JP Changeux, dans une approche existentialiste, suppose que c'est une pure création de notre esprit, une partie structurante de notre activité cérébrale motivée par le besoin de nous adapter au monde extérieur. A ce titre elle est aussi évolutive, mais sous contrainte du monde physique extérieur.
- Cette présentation ne donne qu'un aperçu du sujet et, la philosophie n'étant pas une science, nous ne trancherons pas!

Conclusion

- Le formalisme de Newman-Penrose, en plus de simplifier les équations et de révéler les symétries cachées des espace-temps, ouvre la porte à une nouvelle approche conceptuelle reposant sur des géodésiques à base nulle et des coordonnées nulles.
- Il s’agit d’une approche duale de celle de l’analyse habituelle.
- Une analyse basée sur la fréquence impliquera le formalisme de Fourier où, comme de nombreux outils ont été développés, cela ouvrira un nouveau champ d’analyse.

Réferences

- 1- G.Bachelard (1966). “Le nouvel esprit scientifique” 9ième edition, PUF. Translated by Arthur Goldhammer (1986).“The new scientific spirit”, Bacon press.
- 2- B. Delamotte (2006) : Un soupçon de théorie des groupes: groupe des rotations et groupe de Poincaré. https://cel.archives-ouvertes.fr/file/index/docid/92924/filename/DEA-TH-GROUPES-2efinal.pdf
- 3-. C.W Misner, K.S. Thorne, J.A Wheeler. “Gravitation” Freeman
- 4- S. Chrandrasekhar. (1983). “The mathematical theoty of black holes” Oxford University Press.
- 5- E. T. Newman, R. Penrose (1962): “An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients ”. Journal of Mathematical Physics. **3** (3): 566–768.
- 6-A-Z Petrov (1954). "Klassifikacya prostranstv opredelyayushchikh polya tyagoteniya". Uch. Zapiski Kazan. Gos. Univ. **114** (8): 55–69. English translation Petrov, A.Z. (2000). "Classification of spaces defined by gravitational fields". General Relativity and Gravitation. **32** (8): 1665–1685.
- 7-Pirani, F. A (1957)."Invariant formulation of gravitational radiation theory", Phys. Rev., **105** (3): 1089–1099.
- 8- J. Fric. “Special relativity in null coordinates”. https://vous-avez-dit-bigbang.fr/?page_id=1716
- 9- R.P. Kerr (1963). "Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics". Physical Review Letters. **11** (5): 237–238.
- 10- E. Newman, A. Janis (1965). "Note on the Kerr Spinning-Particle Metric". Journal of mathematical Physics. **6** (6): 915–917.
- 11- B. Carter (1968). "Global structure of the Kerr family of gravitational fields". Phys. Rev. **174** (5): 1559–1571.
- 12- E. Cartan (1922) “Sur les espaces conformes généralisés et l’Univers optique”. CRAS 27 mars 1922 p.857-860.
- 13- J. Fric (2020) : Vous avez dit Big Bang?, livre_ Edition Les 3 Colonnes

ANNEXES

1-Les coordonnées nulles sont des coordonnées d’espace-temps

- Les deux degrés de liberté supplémentaires sont donnés par la partie réelle et la partie imaginaire du vecteur complexe.
- Le vecteur conjugué complexe est introduit pour obtenir une matrice 4 x 4 pour la transformation des coordonnées.
- Les coordonnées nulles U et V sont une combinaison d’une coordonnée d’espace, x ou y ou z, et de la coordonnée temporelle t.
- Supposons que nous sélectionnions la coordonnée x.

Les coordonnées nulles sont des coordonnées d’espace-temps

- Par conséquent, U et V ont un caractère d’espace-temps.
- Les coordonnées W et W* sont une combinaison de deux coordonnées spatiales, y et z dans notre choix.
- Pour obtenir un caractère spatio-temporel, l’un d’eux, z dans notre choix, est multiplié par « i », ce qui confère à z un caractère temporel, sous la forme du ds^2.

Les coordonnées nulles sont des coordonnées d'espace-temps

- Par conséquent, les coordonnées nulles W et W* sont également des coordonnées d'espace-temps.
- La forme habituelle de Minkowski:
  - $ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$
- utilise une coordonnée temporelle et trois coordonnées spatiales.
- Le caractère spatio-temporel du ds^2 provient de l'ajout d'un terme temporel et de trois termes spatio-temporels.

Les coordonnées nulles sont des coordonnées d’espace-temps

- Dans le formalisme de Newman-Penrose, le même ds^2,
  $$ds^2 = -2dU.dV + 2dW.dW^*$$
- hérite du caractère des coordonnées qui sont toutes des coordonnées de l’espace-temps.
- Pas étonnant que ces coordonnées simplifient les équations. De plus, cela conforte l’argument de Penrose sur le rôle structurel de la lumière qui, parce qu’elle a un caractère spatio-temporel, est plus appropriée pour décrire un espace-temps!

2-Le formalisme de Newmann-Penrose en RR, (commentaire)

- Le point clé est que la métrique à utiliser est celle définie dans ce formalisme.
- Par conséquent, toutes les propriétés telles que la nullité d'un vecteur, l'orthogonalité du vecteur, la norme d'un vecteur doivent être calculées selon les règles de la relativité en utilisant leur métrique « spinor-like ».
- Quelques exemples ci-dessous l'illustrent.

3-Contribution de E. Cartan- article

avec le paramètre b. On trouve pour la loi résultante

$$\log\varphi(z) = -pa|z| - qbz^2,$$

d'où

$$\log\varphi\left(\frac{z}{p}\right) = -a|z| - \frac{qb}{p^2}z^2.$$

A la limite, si p et q sont du même ordre de grandeur, on trouve la loi définie par la formule (1). D'une manière générale, c'est la loi correspondant à la plus petite valeur de α qui l'emporte. Le résultat peut changer si p et q ne sont pas du même ordre de grandeur; on remarque en particulier dans l'exemple cité que si $q = cp^2$, on trouve à la limite la loi définie par

$$\log\varphi\left(\frac{z}{p}\right) = -a|z| - bcz^2,$$

qui n'est pas une loi stable. On peut être tenté de considérer comme évident qu'on ne peut obtenir à la limite qu'une loi stable. Cela n'est exact que si p et q sont du même ordre de grandeur, et, dans ce cas, la démonstration du fait énoncé est immédiate.

GÉOMÉTRIE. — *Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique.* Note de M. E. Cartan, présentée par M. Émile Borel.

D'après une définition générale donnée dans une Note précédente ([1]), un espace conforme généralisé est un espace qui jouit, au voisinage de chaque point, de toutes les propriétés de l'espace conforme et pour lequel on a une loi de repérage mutuel de deux systèmes de référence attachés à deux points infiniment voisins. Je rappelle que dans un espace conforme les seules propriétés intrinsèques des figures sont celles qui se conservent par une transformation conforme (déplacement, similitude, inversion ou combinaison de ces transformations); la notion de distance n'existe pas (tandis que celle d'angle subsiste); néanmoins on peut parler du rapport des longueurs de deux vecteurs infiniment petits issus d'un même point. Analytiquement, les transformations conformes sont les transformations les plus générales qui conservent l'équation obtenue en annulant une forme quadratique de différentielles à coefficients constants (l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$ pour l'espace conforme ordinaire). En relativité restreinte la propagation de la lumière se fait d'après l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2 = 0$: cette équa-

([1]) *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 734-736.

tion définit un Univers conforme à quatre dimensions; les rayons lumineux jouent dans cet Univers le même rôle que les droites isotropes dans l'espace conforme ordinaire.

Les transformations conformes qui laissent invariant un point donné A forment un sous-groupe du groupe conforme : par une inversion de centre A ce sous-groupe se ramène au groupe des similitudes (déplacements et homothéties); en particulier les transformations qui, par l'inversion considérée, se réduisent aux translations, jouissent de la propriété de remplacer tout cercle passant par A en un cercle tangent; autrement dit, *elles conservent toutes les directions issues de* A; nous donnerons à ces transformations particulières le nom d'*élations*. En définitive, il résulte de ce qui précède que toute transformation conforme qui laisse fixe un point donné A peut se ramener : 1° à une homothétie de centre A; 2° à une rotation autour de A; 3° à une élation. C'est l'existence de ces élations qui distingue l'espace conforme de l'espace euclidien des similitudes dont l'Univers de H. Weyl peut être considéré comme une déformation ([1]).

Cela posé, à tout espace conforme généralisé correspondra une équation obtenue en annulant une certaine forme quadratique de différentielles; mais cette équation ne suffira pas pour définir l'espace généralisé, car elle ne donnera qu'une partie des éléments nécessaires au repérage mutuel de deux systèmes de référence attachés à deux points infiniment voisins. Quelle que soit cette loi, elle se traduira, pour tout contour fermé infiniment petit partant d'un point A et y revenant, par une transformation conforme infiniment petite associée à ce contour et qu'on pourra toujours décomposer : 1° en une translation; 2° en une homothétie de centre A; 3° en une rotation autour de A; 4° en une élation de centre A. L'espace conforme généralisé aura ainsi une courbure de translation ou torsion, une courbure d'homothétie, une courbure de rotation et une courbure d'élation.

L'équation obtenue en annulant le ds^2 de l'Univers d'Einstein définit une infinité d'espaces conformes généralisés. Les rayons lumineux seront les droites isotropes généralisées d'un de ces espaces si celui-ci est dénué de torsion.

A une équation $ds^2 = 0$ donnée correspondent une infinité d'espaces conformes généralisés dénués de torsion. Parmi tous ces espaces on peut en trouver un et un seul satisfaisant aux conditions supplémentaires suivantes :

1° Il n'a pas de courbure d'homothétie;

2° Le tenseur de Ricci ([1]) est identiquement nul.

Il est évident que les propriétés géométriques de cet espace, qu'on pourrait appeler *normal*, sont liées d'une manière invariante à l'équation $ds^2 = 0$ donnée.

Si l'espace considéré est à $n = 3$ dimensions, la condition 2° entraîne la suppression de la courbure de rotation; toute direction issue de A reste invariante par le déplacement associé à un contour fermé quelconque partant de A et y revenant : on peut dire que toutes les directions issues d'un point sont *stables*. Si la seule courbure d'élation qu'admet l'espace normal vient elle-même à disparaître, l'espace est identique à l'espace conforme ordinaire.

Si $n > 3$, la condition 2° n'entraîne pas en général la disparition de la courbure de rotation. Mais si cette courbure est nulle, la courbure d'élation est aussi nulle d'elle-même et l'espace est identique à l'espace conforme proprement dit.

Le cas $n = 4$ est particulièrement important. Nous pouvons convenir d'appeler *Univers optique d'Einstein* l'espace conforme généralisé normal défini en annulant le ds^2 de l'Univers d'Einstein. C'est conformément aux propriétés géométriques de cet Univers optique que se fait la propagation de la lumière. La courbure de rotation de cet Univers est définie en chaque point par dix quantités scalaires, ou encore par une forme quadratique ternaire à coefficients complexes, qu'un changement du système de référence transforme par une substitution orthogonale. Au point de vue géométrique, la propriété suivante mérite d'être signalée. Il existe en chaque point A quatre directions *optiques* (c'est-à-dire annulant le ds^2) privilégiées. Elles sont caractérisées par la propriété que si AA′ est l'une d'elles, elle se conserve par le déplacement associé à un parallélogramme élémentaire admettant comme côtés AA′ et une autre direction optique *quelconque* issue de A. Dans le cas du ds^2 d'une seule masse attirante (ds^2 de Schwarzschild), ces quatre directions optiques privilégiées se réduisent à deux (doubles) : les deux rayons lumineux qui leur correspondent iraient au centre d'attraction ou en viendraient.

Une autre remarque intéressante est fondée sur la relation entre le tenseur de Ricci et le tenseur d'énergie. Elle peut se formuler de la manière suivante : *Dans toute région vide de matière, la courbure de l'Univers matériel d'Einstein est de la même nature géométrique que la courbure de rotation d'un espace*

([1]) Cf. C. Bompiani, *Comptes rendus*, t. 174, 1922, p. 739.

3-E. Contribution de Cartan (commentaire & extrait)

- Référence du C.R.A.S: ***27 mars 1922 : E. Cartan : "Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique"***
- Cet article très important préfigure la classification de Petrov (1954), Pirani (1957) qui sera dérivée bien plus tard. Après avoir rappelé les propriétés d'un espace conforme : « Selon une définition générale donnée dans un article précédent, un espace conforme généralisé est un espace qui possède, au voisinage de chaque point, toutes les propriétés de l'espace conforme et pour lequel il existe une loi reliant les deux systèmes de référence définis en deux points infiniment proches.

3-E. Contribution de Cartan (extrait)

- Référence du C.R.A.S: ***27 mars 1922 : E. Cartan : "Sur les espaces conformes généralisés et l'Univers optique"***
- Je rappelle que dans un espace conforme, les seules propriétés intrinsèques des figures sont celles qui sont conservées par une transformation conforme (translations, similitude, inversion ou une combinaison de ces transformations). La notion de distance n'existe pas (alors que celle d'angle demeure). Néanmoins, on peut parler du rapport des longueurs de deux vecteurs infiniment petits provenant du même point. Analytiquement, les transformations conformes sont les transformations les plus générales qui satisfont l'équation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0$, pour l'espace conforme ordinaire .... ».

3-Contribution de E. Cartan (extrait)

- « Le cas n = 4 est particulièrement important. Appelons «univers optique d'Einstein» l'espace conforme généralisé normalisé défini par la relation $ds^2= dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2= 0$ dans l'univers d'Einstein. La propagation de la lumière est conforme aux propriétés géométriques de cet Univers optique. La courbure rotationnelle de cet Univers est définie en chaque point par dix quantités scalaires, ou par une forme quadratique ternaire à coefficients complexes, qu'un changement du système de référence transforme par une substitution orthogonale ».
-

3-Contribution de E. Cartan (extrait)

- « Du point de vue géométrique, la propriété suivante mérite d'être soulignée. Il existe dans chaque point A, quatre directions optiques (où $ds^2 = 0$) privilégiées.
- Elles sont caractérisées par la propriété que si AA' est l'une d'entre elles, elle est préservée par le déplacement associé à un parallélogramme élémentaire admettant comme côté AA' et toute autre direction optique provenant de A. Dans le cas d'une masse la seule attractive comme dans le ds^2 de la solution de Schwarzschild, ces quatre directions optiques privilégiées sont réduites à deux (doubles) : Les deux rayons lumineux qui leur correspondent iraient au centre d'attraction ou en proviendraient. »

Notes sur la contribution d’E. Cartan

- 1-Celle du 13 mars 1922 T174 p. 734-736 citée ci-dessus.
- 2-Pour la lumière comme $ds^2 = 0$, on voit qu’elles vont pouvoir être décrites de cette manière. “En relativité restreinte, les rayons lumineux jouent le même rôle que les droites isotropes de l’espace conforme ordinaire”
- 3-Ce qu’on suppose en relativité générale.
- 4-Les composantes indépendantes du tenseur de Weyl.
- 5-Ceci sera également vrai pour la solution plus générale de Kerr-Newmann (donc celles qu’elle recouvre) qui est issu d’une seule masse attirante (Classification de Petrov-Pirani l’espace-temps est de Type D).
- 6-À noter que E. Cartan avait déjà publié de nombreux articles sur la structure des espaces dans les C.R.A.S. du 2/09/1918 “Sur les variétés à 3 dimensions”, du 16/09/1918(“Sur les variétés développables à trois dimensions”, du 30/09/1918 “Sur les variétés de Beltrami à trois dimensions”, du 14/10/1918 “Sur les variétés de Riemann à trois dimensions”, du 14/06/1920 “Sur la déformation projective des surfaces”, 5/07/1920 “Sur l’applicabilité projective des surfaces”, mais cela ne concernait pas spécifiquement la relativité générale.
- 7-Sans doute qu’il est plus correct de dire que la lumière est le révélateur de propriétés structurelles de l’espace.