

14- Comparaison des 3 formes pour la solution de Schwarzschild

Une représentation graphique synthétique des différentes formes permettra de mieux comprendre la solution de Schwarzschild.

A- Représentation dans les coordonnées de Schwarzschild.

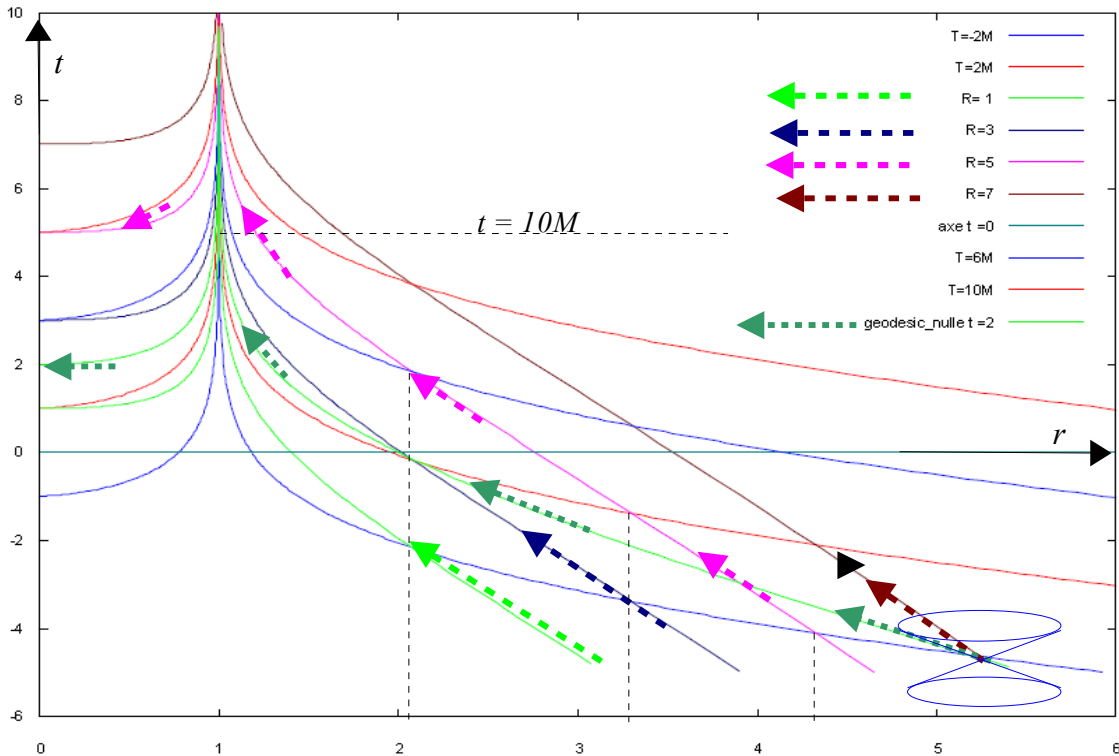


Figure 14-1¹: Différents systèmes de coordonnées représentés dans le plan r, t (forme de Schwarzschild).

On a représenté 4 isochrones de temps propre ($T = \tau = t_{ff} = \text{cste}$) en trait fin de couleur et repérées par $T = n.2M$ sur la légende du dessin.

On a représenté 4 géodésiques parcourues par les observateurs de Painlevé (ou de Lemaître) en traits fins de couleur surmontés d'une flèche en trait épais interrompu de la même couleur pour indiquer la direction.

Elles sont étiquetées, sur la légende, par la coordonnée de Lemaître χ , égale à la constante d'intégration τ_0 de Painlevé, notée R sur la figure ($R = 1, 3, 5, 7$).

La géodésique nulle² $t = 2$ est représentée en vert (surmontées par des flèches vertes pointillées). Ceci permet de positionner cette géodésique lumière par rapport aux autres.

Un cône de lumière (en trait fin bleu) est tracé en un point ($R = 7, T = -2M, r \approx 5.3, t \approx -4$) de la trajectoire³ (en trait marron plein) de l'observateur de Lemaître de coordonnée $R = 7$.

Il montre que la trajectoire géodésique de Painlevé ($R = 7$) est orthogonale à l'hypersurface à temps propre constant $T = -2M$, (symétrique par rapport au cône de lumière).

a) **Coordonnées de Schwarzschild** (coordonnées cartésiennes sur la figure 14-1).

¹ Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées: $2M = 1, G = 1, c = 1$.

² La géodésique nulle radiale satisfait à l'équation $dt/dr = \pm|1-2m/r|^{-1}$ soit $t = -[r + 2m \ln(r - 2m)] + t_0$ pour la géodésique entrante où t_0 est une constante d'intégration.

³ On a représenté un cône de lumière pour montrer que la trajectoire de l'observateur de Lemaître est bien à l'intérieur et qu'elle est orthogonale au sens de la RR aux hypersurfaces $T = \text{constante}$: symétrique par rapport à la trajectoire des photons. A l'approche de l'horizon les cônes de lumière se ferment.

L'axe de la coordonnée r ($t = 0$) est représenté horizontalement.

L'axe de la coordonnée t ($r = 0$) est représenté verticalement à gauche. Les isochrones $t = cste$ ⁴ sont des droites parallèles à l'axe des r . On a tracé $t = 10M$.

b) Coordonnées de Painlevé (coordonnées mixtes)

La coordonnée spatiale r est identique à celle de Schwarzschild.

La coordonnée temporelle $T = \tau = t_{ff}$ est « curviligne » dans cette représentation. Elle est matérialisée par quelques courbes isochrones à $T = cste$ (courbes à $T = -2M, 2M, 6M, 10M$)

c) Coordonnées de Lemaître (coordonnées « curvilignes »)

La coordonnée temporelle est identique à celle de $T = \tau = t_{ff}$ de la forme de Painlevé.

La coordonnée spatiale radiale $\chi = R$ est tracée pour quelques courbes isospatiales (avec flèches) à $\chi = R = cste$ pour $R = 1, 3, 5, 7$, chacune correspondant à un observateur de Lemaître. Ces courbes correspondent aux géodésiques suivies par des observateurs de Painlevé/Lemaître⁵ dans ces coordonnées de Schwarzschild.

Suivons l'évolution du temps propre T , en fonction de r , de l'observateur de Painlevé/Lemaître sur sa géodésique de coordonnée $R = \tau_0 = 5$ (Deuxième courbe, en magenta, en partant du haut, surmontée par des flèches pointillées magenta), sur le diagramme on lit:

Pour $r \approx 4.4$, $T = -2M$, pour $r \approx 3.2$, $T = 2M$, pour $r \approx 2.05$, $T = 6M$, après cela nécessiterait un zoom car cela devient illisible sur le diagramme.

En fait cette géodésique ne va jamais couper la courbe isochrone $T = 10M$.

Cela illustre le mouvement de l'observateur dans les coordonnées de Schwarzschild par rapport à son temps propre.

Ce diagramme illustre donc comment un observateur de Painlevé en suivant une géodésique atteint la singularité $r = 0$ (et à fortiori l'horizon) en un temps propre fini.

La géodésique associée, bien que tendant vers l'infini pour $r = 2M$ dans ce diagramme, reste toujours inférieure (en dessous sur le dessin, ceci pouvant être montré par le calcul, à partir des équations géodésiques, car sur la figure on ne peut que le supposer) à une isochrone de temps propre donnée.

Ce diagramme en coordonnées « cartésiennes » de Schwarzschild, éclaire le paradoxe relatif au fait que l'observateur de Painlevé atteint l'horizon en un temps propre τ fini mais que, pour un observateur de Schwarzschild, il met un temps t infini pour atteindre l'horizon !

Il montre que les deux points de vue sont parfaitement compatibles: Il n'y a pas de paradoxe!

⁴ Si une telle isochrone est géométriquement bien définie, sa réalisation physique n'est pas évidente.

⁵ C'est bien le même observateur, tous les deux sont en chute libre radiale depuis l'infini avec $v = 0$ à $r = \infty$, seul l'étiquetage spatial change. Il est fixe pour Lemaître et variable pour Painlevé.

B- Temps des observateurs de Painlevé et Schwarzschild en coordonnées de Painlevé.

Le temps t des observateurs de Schwarzschild est représenté par un réseau de courbes $t = cste$, sur un diagramme en coordonnées r , t_{ff} .

Ici nous nous plaçons du point de vue dual, celui de l'observateur de Painlevé.

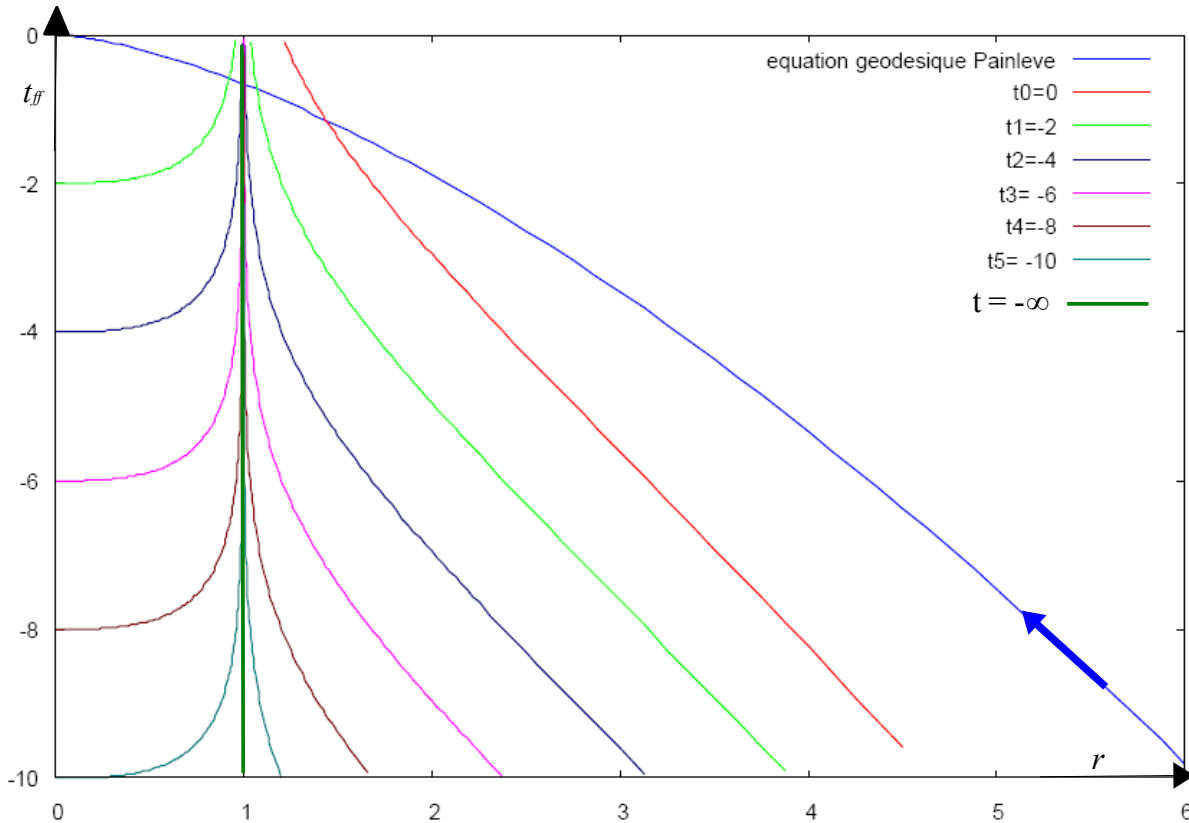


Figure 14-2 ⁶: On voit que les isochrones du temps t d'un observateur de Schwarzschild viennent « tangenter » l'horizon en $r=1$. L'isochrone $t = -\infty$ est une droite verticale à $r=1$.

Rappelons que la réalisation physique d'une isochrone en coordonnées de Schwarzschild n'est pas évidente puisqu'il est impossible de synchroniser⁷ les horloges associées aux observateurs statiques le long d'une géodésique radiale qui battent toutes à des rythmes tous différents du fait de l'accélération subie qui varie avec r .

Nous n'avons pas ce problème avec l'isochrone temps de Painlevé⁸ puisque les horloges associées aux observateurs sont toutes en chute libre et battent au même rythme⁹.

La géodésique suivie par l'observateur de Painlevé a coupé toutes les valeurs de $t = cste$, y compris $t = -\infty$, en atteignant l'horizon¹⁰. Comme $t = 0$ à l'arrivée sur la singularité, $t < 0$ indique le décompte du temps propre de l'observateur de Painlevé, restant avant l'issue fatale.

⁶ Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées: $2M = 1$, $G = 1$, $c = 1$

⁷ Du moins par la méthode classique des signaux lumineux aller retour. Il existe d'autres méthodes car la solution étant statique c'est formellement possible. Voir Landau Lifchitz 1994, §97. Par exemple, on peut "compenser" de façon connue et constante la différence de rythme des horloges aux différents points de la radiale. L'horloge d'un observateur particulier étant déclaré maître elle peut envoyer des signaux de synchronisation à intervalle régulier permettant à chacun de calculer le facteur correctif à appliquer à sa propre horloge. La synchronisation initiale peut être réalisée par la méthode des aller-retour de signaux. Elle peut ensuite être conservée en appliquant le facteur correctif local. Mais ce n'est pas très pratique....

⁸ Ceci confirme, une fois de plus, que la forme de Painlevé qui correspond à une meilleure description physique de l'espace temps que celle d Schwarzschild. Voir la méthode de Gautreau Hoffmann pour une réalisation.

⁹ Nous verrons que c'est une des raisons qui fait prononcer à Painlevé ses propos si contestés.

¹⁰ Pour la réalisation physique des isochrones voir commentaires précédents.

Sur l'horizon, l'horloge de l'observateur de Painlevé indique $-2/3$ alors que celle donnée par l'isochrone pour les observateurs de Schwarzschild, qui date l'évènement pour eux, vaut $-\infty$. On voit comment la coordonnée t diverge par rapport à t_{ff} quand on atteint l'horizon. En fait cette propriété s'étend à tout observateur statique à l'extérieur de l'horizon puisque dans ce cas son temps propre est du type $f(r).t$ avec $f(r)$ fini.

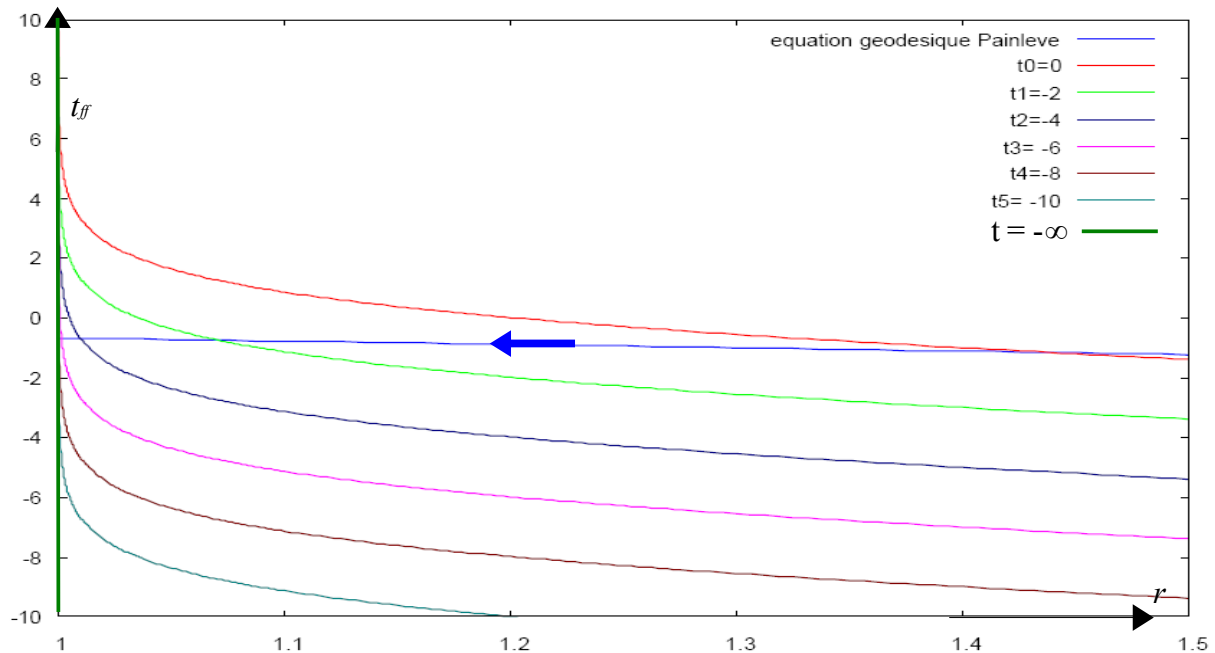


Figure 14-3¹¹: Zoom autour de l'horizon de la figure 14-2, (équation géodésique en bleu, avec flèches). Autre point de vue ci dessous.

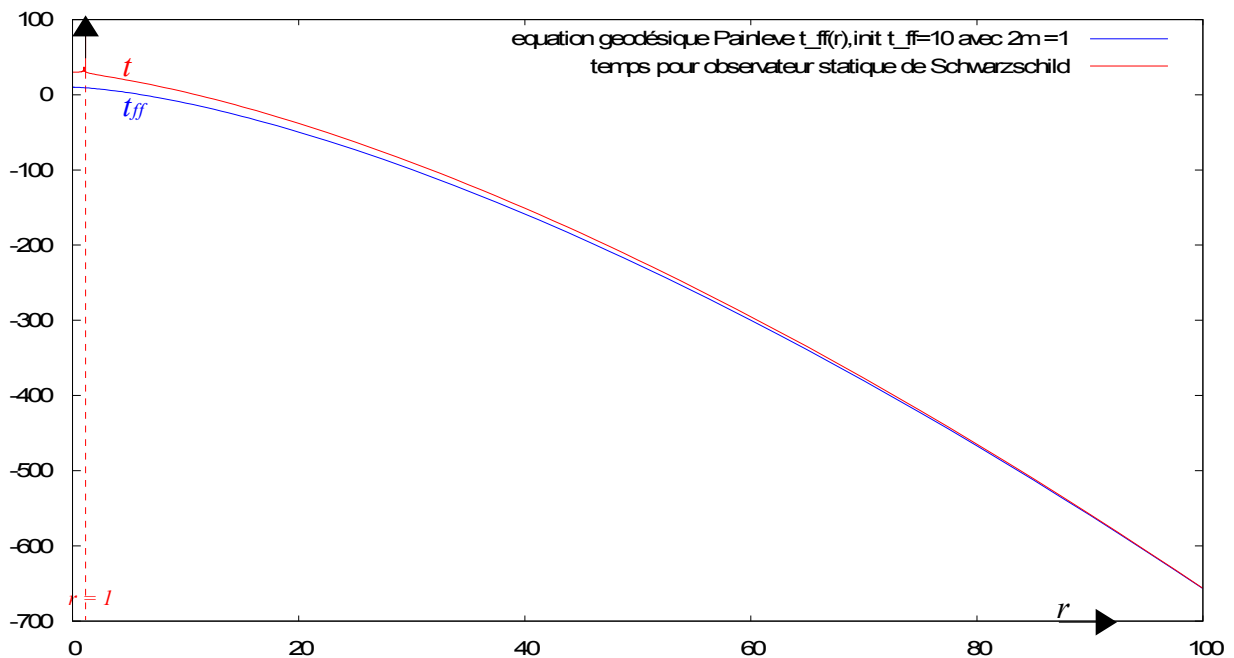


Figure 14-4¹²: Comparatif entre le temps chute libre $t_{ff}(r)$ écoulé mesuré par un observateur de Painlevé et le temps écoulé $t(r)$ mesuré par un observateur de Schwarzschild depuis un point de rencontre lointain¹³ ($r = 100$). Notons la divergence de $t(r)$ pour $r = 1$ et que $t(r) > t_{ff}$.

¹¹ Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées: $2M = 1, G = 1, c = 1$

¹² Diagramme réalisé avec le logiciel Maxima). Unités utilisées: $2M = 1, G = 1, c = 1$

¹³ Où ils se sont synchronisés. Sur la figure, nous trichons un peu (la convergence devrait se faire à l'infini).