Les Trous noirs de la famille de Kerr

Vous avez dit « Rotation »?

Pas si simple!

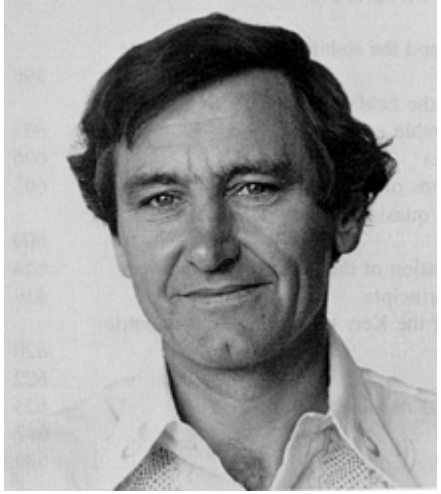
La phénoménologie incroyable des trous noirs de la famille de Kerr.

Masse en rotation ?

- Une solution de la RG est un univers.
- Comment définir la rotation d'un univers?
- Pas par rapport à un autre, car une solution de la RG définit un univers et un seul!
- Rotation « intrinsèque » qui se traduit par certaines caractéristiques structurelles propres
- Converge en champ faible avec le concept classique de rotation dans un espace de fond. Solution « post Newtonienne » trouvée dès 1918 (Thirring), mais la solution globale a résisté 45 ans du fait de cette approche!!!

1963: Kerr trouve une solution

De son propre aveu, Kerr n'avait pas réalisé l'importance de ses travaux à ce moment-là, comme en témoigne l'article qu'il publie, très court (une page et demi), et se concentrant uniquement sur des aspects purement mathématiques



GRAVITATIONAL FIELD OF A SPINNING MASS AS AN EXAMPLE OF ALGEBRAICALLY SPECIAL METRICS

Roy P. Kerr*

University of Texas, Austin, Texas and Aerospace Research Laboratories, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio

(Received 26 July 1963)

Goldberg and Sachs[1] have proved that the algebraically special solutions of Einstein's empty-space field equations are characterized by the existence of a geodesic and shear-free ray congruence, k_μ. Among these spaces are the plane-fronted waves and the Robinson-Trautman metrics[2] for which the congruence has nonvanishing divergence, but is hypersurface orthogonal.

In this note we shall present the class of solutions for which the congruence is diverging, and is not necessarily hypersurface orthogonal. The only previously known example of the general case is the Newman, Unti, and Tamburino metrics,[3] which is of Petrov Type D, and possesses a four-dimensional group of isometries.

If we introduce a complex null tetrad (t^* is the complex conjugate of t), with

$$ds^2 = 2tt^* + 2mk,$$

then the coordinate system may be chosen so that

$$t = P(r + i\Delta)d\zeta,$$

$$k = du + 2\,\mathrm{Re}(\Omega d\zeta),$$

$$m = dr - 2\,\mathrm{Re}\{[(r - i\Delta)\dot{\Omega} + iD\Delta]d\zeta\} + \Big\{r\dot{P}/P + \mathrm{Re}[P^{-2}D(D^*\ln P + \dot{\Omega}^*)] + \frac{m_1 r - m_2\Delta}{r^2 + \Delta^2}\Big\}k; \qquad (1)$$

where ζ is a complex coordinate, a dot denotes differentiation with respect to u, and the operator D is defined by

$$D = \partial/\partial\zeta - \Omega\partial/\partial u.$$

P is real, whereas Ω and m (which is defined to be $m_1 + im_2$) are complex. They are all independent of the coordinate r. Δ is defined by

$$\Delta = \mathrm{Im}(P^{-2}D^*\Omega).$$

There are two natural choices that can be made for the coordinate system. Either (A) P can be chosen to be unity, in which case Ω is complex, or (B) Ω can be taken pure imaginary, with P different from unity. In case (A), the field equations are

$$(m - D^*D^*D\Omega) = |\partial_u D\Omega|^2, \qquad (2)$$

$$\mathrm{Im}(m - D^*D^*D\Omega) = 0, \qquad (3)$$

$$D^*m = 3m\dot{\Omega}. \qquad (4)$$

The second coordinate system is probably better, but it gives more complicated field equations.

It will be observed that if m is zero then the field equations are integrable. These spaces correspond to the Type-III and null spaces with

1963: Kerr trouve une solution

nonzero divergence. If $m \neq 0$, then there are certain integrability conditions which must be satisfied by Eqs. (2)-(4). These may be solved for m as a function of Ω and its derivatives provided that either $\dot{\Delta}$ or $\ddot{\Omega}$ is nonzero. This expression for m may then be substituted back into the field equations giving conditions on Ω and its derivatives, from which further integrability conditions are extracted.

If both $\dot{\Delta}$ and $\ddot{\Omega}$ are zero, then we may transform the metric to a coordinate system in which Ω is pure imaginary and $P \neq 1$, with $\dot{\Omega} = \dot{P} = 0$. The field equations then become

$$m = cu + A + iB,$$

where c is a real constant, and

$$P^{-2}\nabla[P^{-2}\nabla(\ln P)] = 2c, \quad \nabla = \partial^2/\partial\zeta\partial\zeta^*.$$

A, B, and Ω, which are all independent of u and r, are determined by

$$iB = \tfrac{1}{2}P^{-2}\nabla(P^{-2}\partial\Omega/\partial\zeta) - P^{-4}(\partial\Omega/\partial\zeta)\nabla(\ln P),$$

$$\nabla B = ic\partial\Omega/\partial\zeta,$$

$$(\partial/\partial\zeta)(A - iB) = c\Omega,$$

where $\zeta = \xi + i\eta$. If c is zero, then $\partial/\partial u$ is a Killing vector.

Among the solutions of these equations, there is one which is stationary ($c = 0$) and also is axially symmetric. Like the Schwarzschild metric, which it contains, it is Type D. Also, B is zero, and m is a real constant, the Schwarzschild mass. The metric is

$$ds^2 = (r^2 + a^2\cos^2\theta)(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) + 2(du + a\sin^2\theta d\phi) \times (dr + a\sin^2\theta d\phi) - \left(1 - \frac{2mr}{r^2 + a^2\cos^2\theta}\right) \times (du + a\sin^2\theta d\phi)^2,$$

where a is a real constant. This may be transformed to an asymptotically flat coordinate system by the transformation

$$(r - ia)e^{i\phi}\sin\theta = x + iy, \quad r\cos\theta = z, \quad u = t + r,$$

the metric becoming

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - dt^2 + \frac{2mr^3}{r^4 + a^2z^2}(k)^2,$$

$$(r^2 + a^2)rk = r^2(xdx + ydy) + ar(xdy - ydx) + (r^2 + a^2)(zdz + rdt). \qquad (5)$$

This function r is defined by

$$r^4 - (R^2 - a^2)r^2 - a^2z^2 = 0, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2,$$

so that asymptotically $r = R + O(R^{-1})$. In this coordinate system the solution is analytic everywhere, except at $R = a$, $z = 0$.

If we expand the metric in Eq. (5) as a power series in m and a, assuming m to be of order two and a of order one, and compare it with the third-order Einstein-Infeld-Hoffmann approximation for a spinning particle, we find that m is the Schwarzschild mass and ma the angular momentum about the z axis. It has no higher order multipole moments in this approximation. Since there is no invariant definition of the moments in the exact theory, one cannot say what they are, except that they are small. It would be desirable to calculate an interior solution to get more insight into this.

---

*Supported in part by U. S. Air Force through the Aerospace Research Laboratory of the Office of Aerospace Research.

[1]J. N. Goldberg and R. K. Sachs, Acta Phys. Polon. 22, 13 (1962).

[2]I. Robinson and A. Trautman, Proc. Roy. Soc. (London) A265, 463 (1961).

[3]E. Newman, L. Tamburino, and T. Unti (to be published).

Pourquoi la solution a été difficile à trouver?

- La structure des TN n'a été vraiment comprise que dans les années 60.
- Les méthodes utilisées avec succès précédemment ont échoué à décrire un TN «en rotation» pour la raison indiquée au début.
- Il a fallu attendre l'apparition de nouvelles méthodes plus formelles (Classification de Petrov, topologie).
- Les physiciens ont cédé la place aux mathématiciens en RG.

La classification de Petrov -1

- Classer les types d'espace temps vides en RG
- Un espace temps vide est caractérisé par le tenseur de Weyl (tenseur conforme).
- Il faut donc déterminer les niveaux de symétrie de ce tenseur.
- Considéré comme un opérateur $X^{ab} \rightarrow \frac{1}{2} C^{ab}{}_{mn} X^{mn}$ agissant sur des tenseurs d'ordre deux, cela revient à en déterminer le nombre de valeurs propres. $\frac{1}{2} C^{ab}{}_{mn} X^{mn} = \lambda X^{ab}$
- On peut avoir de 1 à 4 valeurs propres différentes dont les combinaisons donnent:

La classification de Petrov -2

- **Type I** : Quatre directions principales nulles,
- ***Type II** : Une direction double et deux directions simples principales nulles,
- ***Type D** : Deux directions doubles nulles,
- ***Type III**: Une direction triple une direction simple principale nulles,
- ***Type N**: Une direction quadruple principale nulle,
- ***Type O** : Le tenseur de Weyl s'annule.
- Les types marqués d'une astérisque (*) sont dit « algébriquement spéciaux ».

Classification de Petrov -3

- Interprétation physique
- En Relativité Générale les différents types de Pétrov algébriquement spéciaux peuvent s'interpréter physiquement, la classification résultante étant quelquefois appelée la **classification des champs gravitationnels**.
- Les régions de **type D** sont associées aux champs gravitationnels d'objets massifs isolés, comme les étoiles. Plus précisément le type **D** est associé au champ gravitationnel d'un objet qui est complètement caractérisé par sa masse et son moment angulaire (Un objet plus général a des moments multipolaires d'ordre plus élevés non nuls). Les deux directions nulles principales définissent les congruences nulles radiales entrantes et sortantes près de l'objet qui est la source du champ.
- Le tenseur gravitoélectrique (tenseur de marée) dans une région de type **D** ressemble beaucoup à son cousin Newtonien décrit par un potentiel gravitationnel de type Coulombien. Un tel champ de marée se traduit par une élongation dans une direction et une compression dans les directions orthogonales, les valeurs propres ont le profil (-2,1,1). Par exemple une capsule spatiale en orbite autour de la Terre subit une élongation radiale minuscule et une compression minuscule dans les directions orthogonales. Le champ de marée décroît en $O(r^{-3})$, comme en mécanique Newtonienne où r est la distance à l'objet.

La solution de Kerr

- Kerr a effectué une recherche systématique de solutions dans le vide de type D de Petrov dont le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ est la somme du tenseur d'espace plat $\eta_{\mu\nu}$ et du produit tensoriel d'un vecteur nul l_μ par lui même, donc une solution (Kerr-Schild) de la forme: $g_{\mu\nu}=\eta_{\mu\nu}+f.l_\mu l_\nu$.
- C'est donc en utilisant les propriétés structurelles du tenseur de Weyl et en élargissant la recherche aux solutions où les hypersurfaces sont non orthogonales aux congruences (ce qui était original) que Kerr a trouvé sa solution stationnaire.
- On utilise le plus souvent une autre forme métrique

Forme de Boyer Lindquist

Dans un système de coordonnées $x^\alpha = (ct, r, \theta, \varphi)$, appelées *coordonnées de Boyer-Lindquist* la métrique de Kerr a pour composantes :

$$\boxed{\begin{aligned} g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta = & -\left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2}\right) c^2 dt^2 - \frac{4GMar\sin^2\theta}{c^2\rho^2}\, c\, dt\, d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta}\, dr^2 \\ & + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r\sin^2\theta}{c^2\rho^2}\right)\sin^2\theta\, d\varphi^2 \end{aligned}}, \qquad (5.24)$$

où

$$\rho^2 := r^2 + a^2\cos^2\theta, \qquad \Delta := r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + a^2 \qquad (5.25)$$

et a et M sont deux constantes, respectivement de la dimension d'une longueur et d'une masse. M est en fait la masse du trou noir et a est relié au moment cinétique du trou noir J par

$$\boxed{a = \frac{J}{cM}}. \qquad (5.26)$$

La constante sans dimension

$$\boxed{\bar{a} := \frac{c^2}{G}\frac{a}{M} = \frac{c}{G}\frac{J}{M^2}} \qquad (5.27)$$

est appelée *paramètre de Kerr*.

Horizons, singularité,ergosphère, boucles temporelles

- Horizons à $\Delta = r^2 - 2GMr + a^2 = 0$, On ne traite que le cas $GM \geq a$

  (racines réelles donc avec horizons) : $r_\pm = GM \pm (GM - a^2)^{1/2}$

- Singularité à $\rho = 0$ soit : $r = 0$ <u>et</u> $\theta = \pi/2$

- Ergosphère quand ∂_t s'annule soit: $\partial_t \partial^t = g_{00} = 0 \rightarrow r = GM + (GM - a^2 \cos^2\theta)^{1/2}$

- La métrique est non singulière pour $r = 0$, $\theta \neq \pi/2$:

  On peut prolonger les géodésiques de coordonnée $\theta \neq \pi/2$ au delà de $r = 0$, vers $r < 0$.

- Boucle temporelle:

- Si θ = constante = $\pi/2$ par exemple, t = constante et r = constante, la métrique se réduit à:

$$ds^2 = -d\tau^2 = [(r^2 + a^2) + (2GMa^2/c^2 r)]d\varphi^2,$$

Si $r < 0$ et $|r| << |a| \rightarrow ds^2 = -c^2 d\tau^2 \approx a^2(1 + 2GM/c^2 r) < 0$, si $r < 0 \rightarrow 0$.

- Il existe des lignes d'univers de type temps où t = cste! Si on fait varier φ de 0 à 2π on décrit une boucle temporelle! Une boucle étant un invariant topologique, ce n'est pas un artefact lié à un mauvais choix de coordonnées. Caractère physique de ces boucles ?

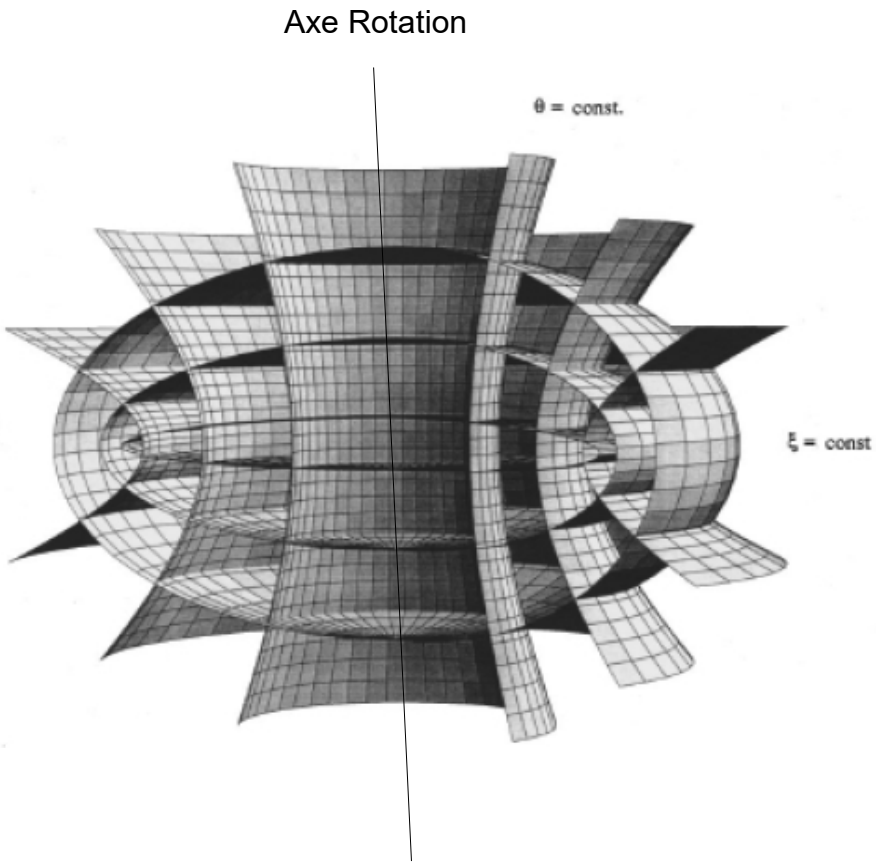
Moment cinétique angulaire du trou noir de Kerr

- Un trou noir étant constitué de vide et d'une singularité il n'est pas immédiat de donner une signification physique à son moment cinétique angulaire J.
- Sa valeur J = acM nous indique que son <u>équivalent</u> classique est une masse M (qu'on pourrait attribuer à l'anneau) animé d'une vitesse égale à c (lumière) par rapport à un axe situé à une distance a (le « rayon » de l'anneau).
- Le fait qu'on puisse, par le procédé de Penrose, extraire du moment cinétique du Trou noir lui confère un caractère physique (puisque on peut mesurer ce qui a été extrait!)

Vitesse de « rotation » du trou noir de Kerr

- Un trou noir étant constitué de vide et d'une singularité il n'est pas immédiat de donner une signification physique à sa rotation :Entraînement de référentiel (frame dragging) !
- Cette rotation de l'espace vide peut être « matérialisée » par des géodésiques lumière tangentielles en co-rotation et contre rotation en calculant <u>sur l'horizon externe r_+</u> le paramètre $\Omega_H = (d\varphi/dt)$. En fait c'est la géométrie des géodésiques qui fait dire que le trou noir est en rotation par similitude avec son homologue classique.
- Physiquement on définit la rotation par : $\Omega_H = \partial M/\partial J$.

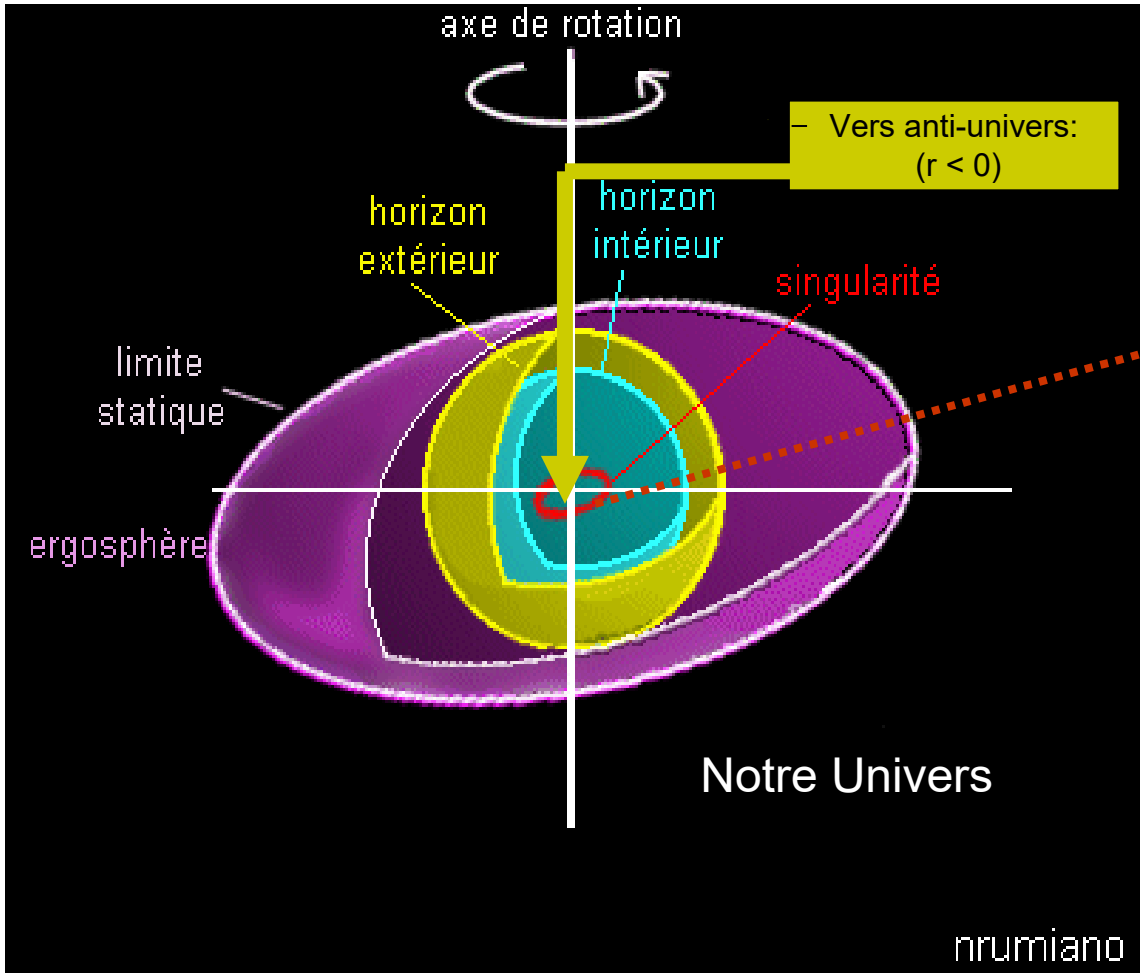
Représentation solution en coordonnées de Boyer Lindquist

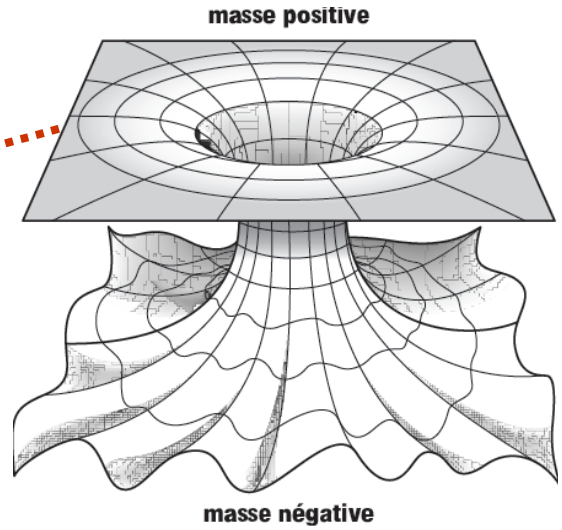


Les surfaces à θ = constante sont des hyperboloïdes de révolution autour de l'axe de symétrie par rotation » (qui correspond à l'hyperboloïde dégénéré pour θ = 0). Pour θ = π/2 l'hyperboloïde dégénère en la partie extérieure à r = 0 du plan équatorial.

Les surfaces à r = constante (notées ξ sur la figure) sont des ellipsoïdes de révolution autour de l'axe de symétrie par rotation qui dégénère en un disque pour r =0 qui est une <u>surface frontière</u> accessible par les r<0 et r> 0, singulière uniquement sur son bord (pour θ = π/2)

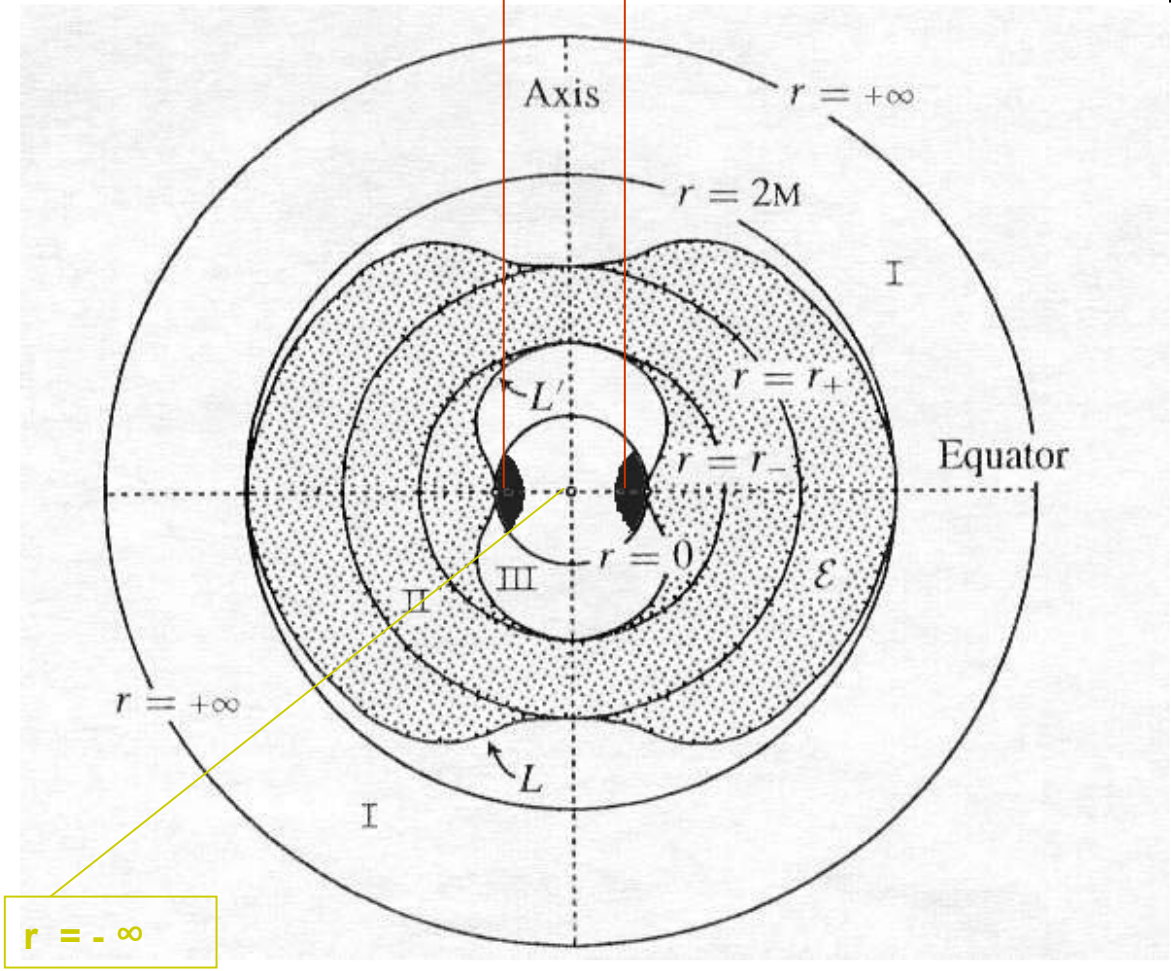
Représentation de la solution



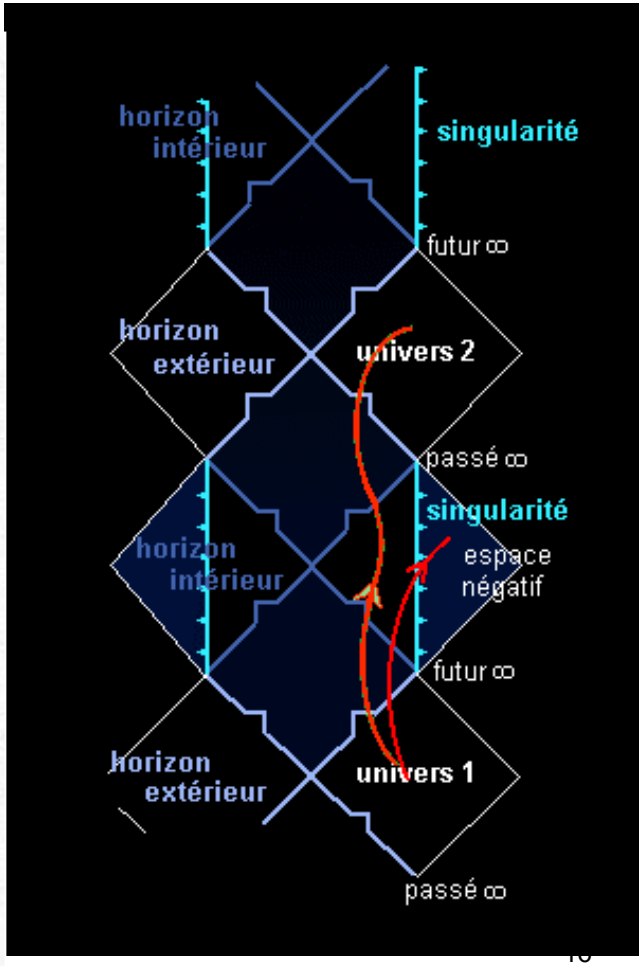


Régions et diagrammes du TN

Tore de la machine temporelle



r = - ∞



Régions et diagramme «formel» du Trou Noir de Kerr (Boyer-Lindquist).

Les trois régions, respectivement de type I ($+\infty > r > r_+$), II ($r_+ > r > r_-$) et III ($r_- > r > -\infty$) sont explicitement représentées sur la figure de droite [38], <u>en coordonnées polaires</u> conformes.

On rappelle que r_+ est l'horizon externe, r_- est l'horizon interne, en gris la région où ∂_t est de type « espace ». L'ergosphère externe (à l'extérieur de l'horizon externe) est repérée par la lettre *L*, l'ergosphère interne (à l'intérieur de l'horizon interne) est repérée par la lettre *L'* sur la figure.

A noter la forme de cette ergosphère interne qui est semblable à celle de l'ergosphère externe mais en inversant le rôle de l'axe et de l'équateur.

On a également représenté en noir, le tore de la machine temporelle en coupe, entièrement situé à $r < 0$ pour un trou noir de Kerr.

Régions et diagramme du TN

Sur la figure de gauche [50] on présente la structure de l'extension analytique maximum, sur un diagramme de Carter Penrose.

Les deux lignes d'univers partent d'un univers de type I, traversent r_+, entrent dans un univers de type II puis traversent r_- et entrent dans un univers de Type III, une des lignes d'univers (à droite) traverse la singularité en anneau et finit dans l'espace temps négatif, l'autre traverse r_- de l'intérieur vers l'extérieur pour atteindre un autre univers causalement déconnecté et poursuivre son chemin.

A noter que cette deuxième ligne d'univers ne peut pas exister dans un Trou noir de Kerr résultant d'un effondrement stellaire.

Régions et diagramme du TN

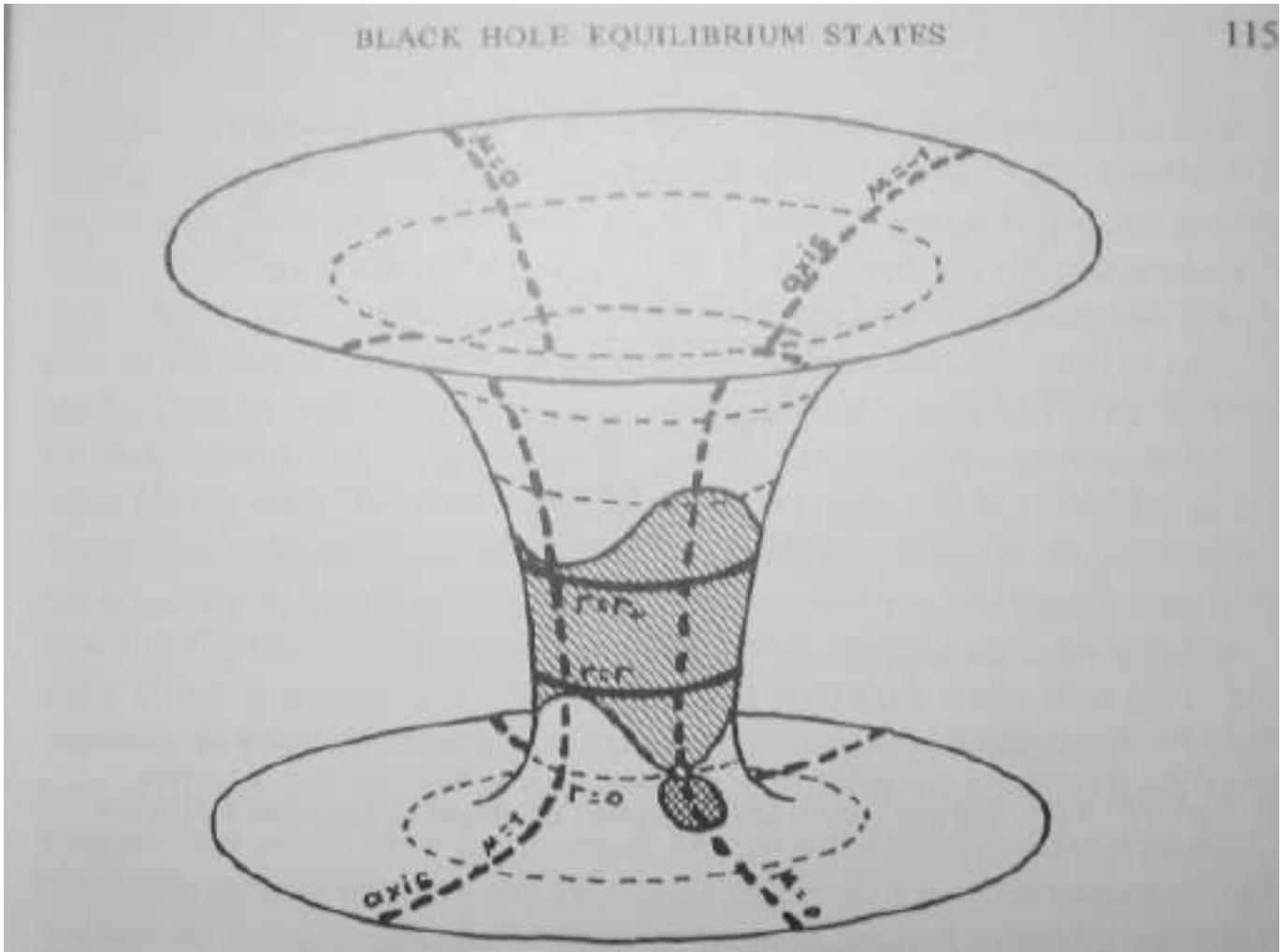


Figure 7.4. Rough sketch in perspective of a polar 2-section in which v and $\tilde{\varphi}$ are constant through a maximally extended Kerr solution when $M^2 > a^2$

Les invariants de la solution

- Solution stationnaire: invariant dans le temps, l'énergie sur une géodésique est conservée. Vecteur de Killing K_μ.
- Solution à symétrie axiale: invariant par les rotations autour de l'axe de rotation, le moment angulaire est conservé sur une géodésique: Vecteur de Killing L_μ.
- Invariant métrique.
- Invariant « surprise » de B.Carter: Tenseur de Killing.

Symétrie des équations

- Symétrie évidente des équations (sauf pour ***e*** dans la métrique):
- Invariance par inversion r/-r et m/-m et e/-e (produits *m.r*, et *e.r*, *e.dr*, les autres termes en *r* et *e* étant quadratiques).

$$ds^2 = \rho^2\Delta^{-1}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^{-2}\sin^2\theta\left[a d\hat{t} - (r^2+a^2)d\hat{\varphi}\right]^2 - \rho^{-2}\Delta\left[d\hat{t} - a\sin^2\theta d\hat{\varphi}\right]^2$$

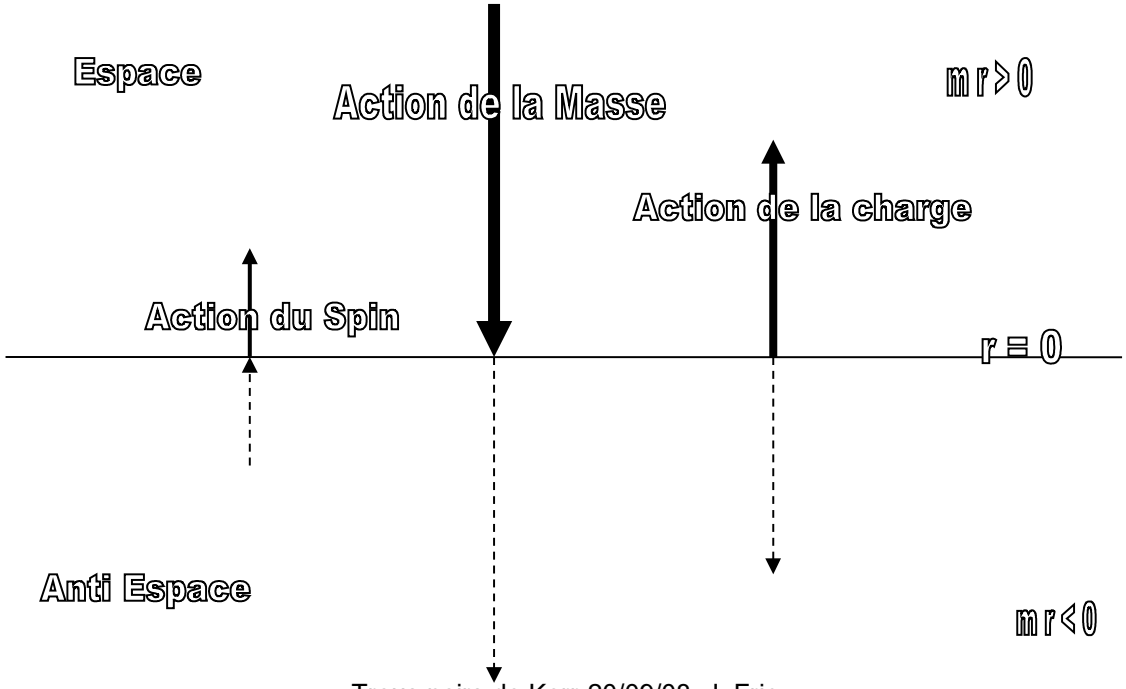
$$\rho^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta\,,$$

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2 + e^2$$

$$F = 2e\rho^{-4}(r^2 - a^2\cos^2\theta)dr \wedge \left[d\hat{t} - a\sin^2\theta\, d\hat{\varphi}\right] - 4e\rho^{-4}ar\cos\theta\sin\theta d\theta \wedge \left[a d\hat{t} - (r^2+a^2)d\hat{\varphi}\right]$$

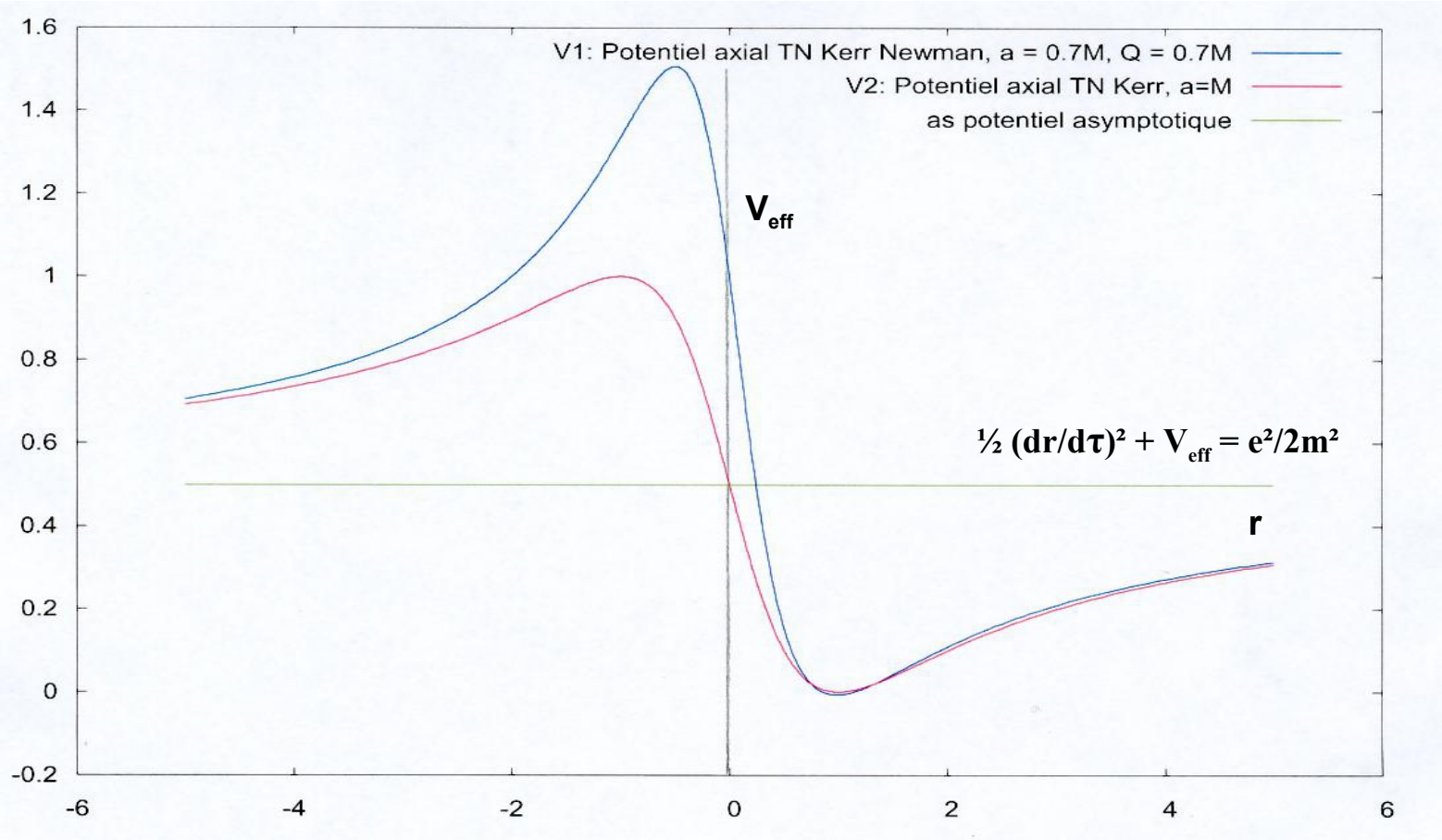
Equation géodésique axiale

- L'équation géodésique sur l'axe (particule neutre):
- $d^2r/d\tau^2 = (-GMr^2 + c^2e^2r + Gma^2)/(r^2+a^2)^2$
- $r \gg a \rightarrow (-GM/r^2 + c^2e^2/r^3 + Gma^2/r^4) \rightarrow -GM/r^2$
- $r \ll a \rightarrow a^{-2}[-Gm(r^2/a^2) + c^2e^2(r/a^2) + Gm) \rightarrow GM/a^2$



Equation géodésique axiale

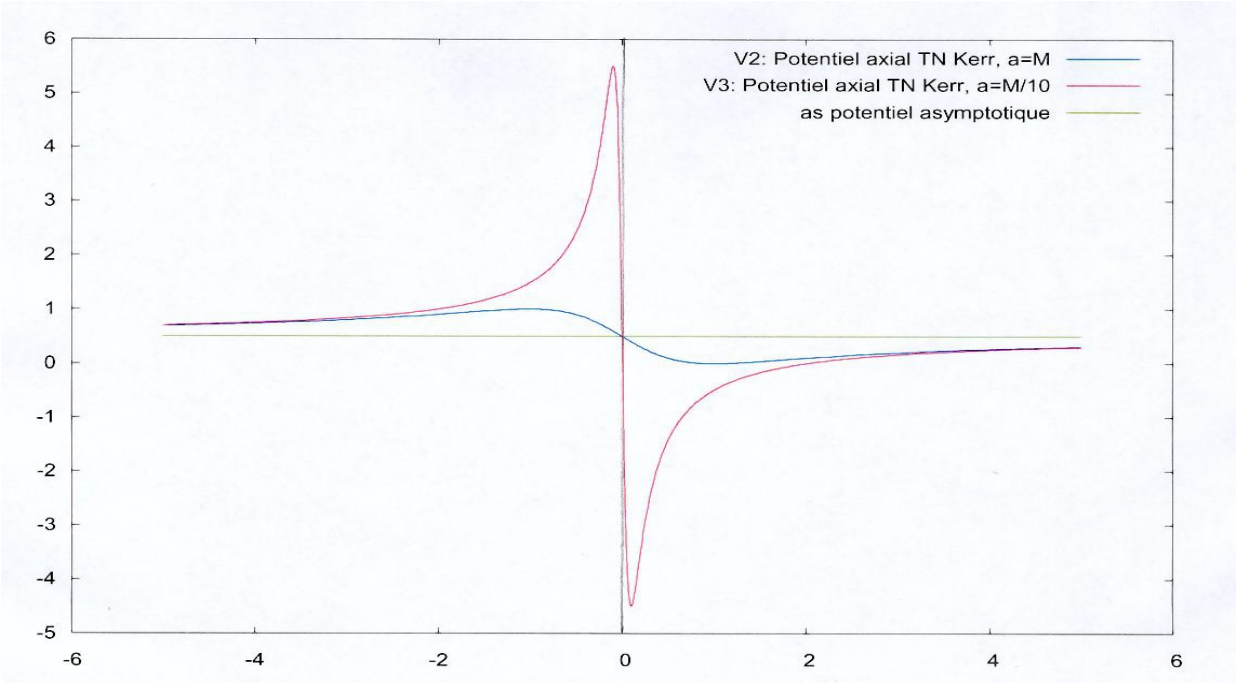
- Potentiel sur l'axe de TN de Kerr(Newman). Barrière de potentiel énorme en général . Une particule lâchée à l'infini sans vitesse ni moment angulaire ne va pas traverser r = 0.



Equation géodésique axiale

- Potentiel sur l'axe de TN de Kerr(Newman). La barrière de potentiel déjà énorme s'accroît et $\rightarrow\infty$ lorsque $a \rightarrow 0$. Ce qui est cohérent avec le TN de Schwarzschild (r =0, singularité)

V_{eff}



r

Symétrie univers/anti-univers

- Anti univers: la masse génère un champ gravitationnel asymptotiquement répulsif.
- Diversité d'interactions: paires, impaires, attractives, répulsives à courte et longue portée.
- Symétrie des interactions sur l'axe (sauf pour l'action de la charge sur une particule neutre).
- Dans l'univers sur l'axe, l'attraction (liée à la masse) est dominante à grande distance, la répulsion (liée à la rotation) à courte distance. Ceci est paradoxal car sur l'axe, on pourrait supposer que l'action de la rotation est nulle!
- Rappelons toutefois la dissymétrie phénoménologique univers/anti-univers (pas d'horizons dans l'anti-univers,..)

Eléments sur l'énergie nécessaire pour franchir la barrière de potentiel

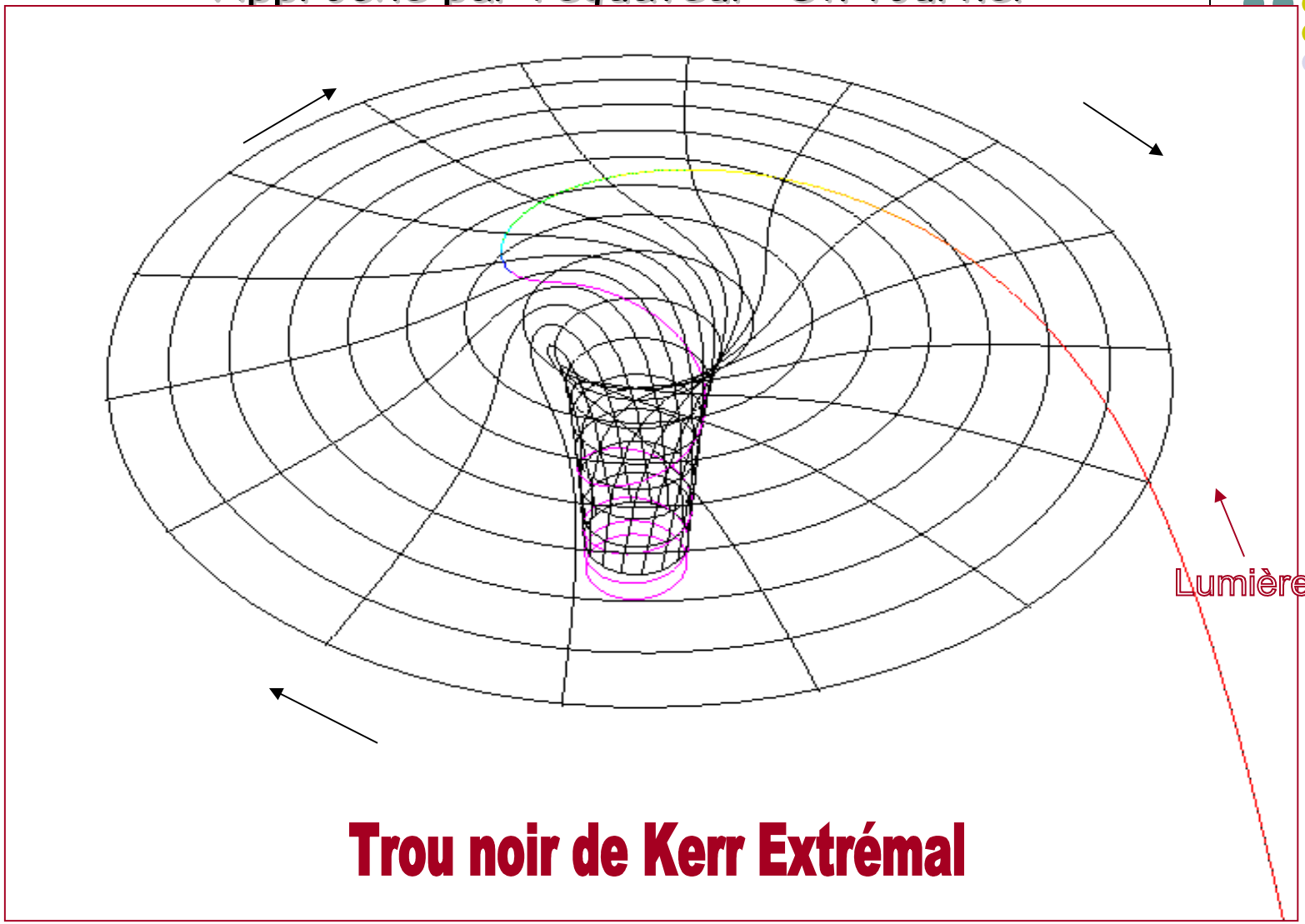
- On montre que la barrière est minimale lorsque le trou noir est extrémal (a =M : moment angulaire maximum).
- Dans ce cas l'énergie cinétique minimale vaut $mc^2(\sqrt{2}-1)$, ce qui correspond à une vitesse de 0,7 c = $2{,}1\times10^8$ m/s environ.
- Pour l'ISS (100 tonnes) en suposant une fusée classique à étage (vitesse éjection des gaz ve =3km/s environ) pour atteindre cette vitesse en appliquant l'équation de Tsiolkovski : $\Delta V = v_e \ln(m_i/m_f)$ soit $m_i/m_f = \exp[2{,}1\times10^8 / 3\times10^3) = \exp(70\,000)$, soit $m_i \approx 10^{30\,000}$ kg
- La masse de l'univers étant estimée à 10^{50} kg, il faudra attendre que d'autres technologies soient disponibles !!!

Géodésiques équatoriales

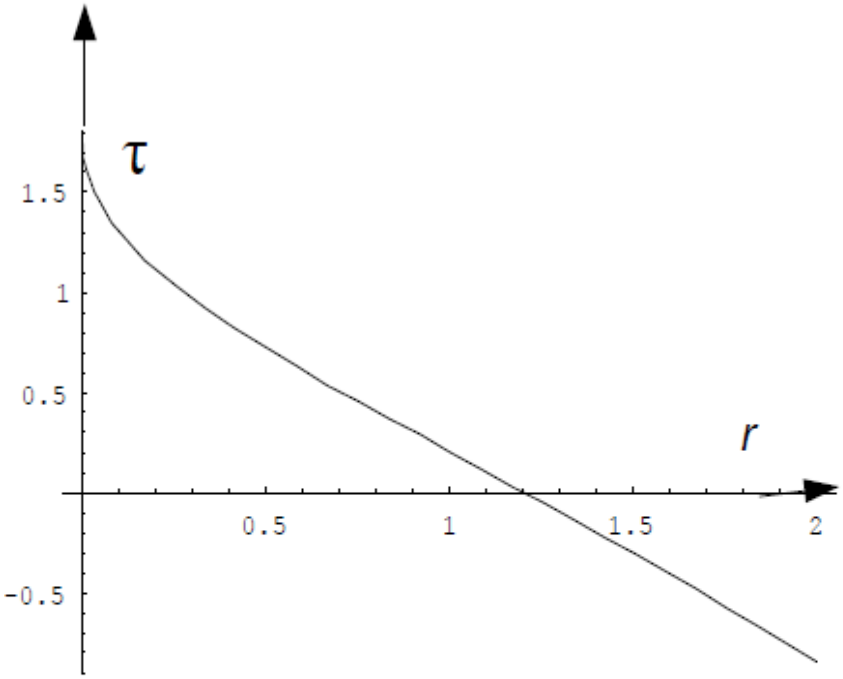
- Géodésique radiale: Une particule de test lâchée sans vitesse ni moment angulaire dans le plan équatorial va décrire une trajectoire qui va spiraler avant de percuter l'anneau singulier central. Paradoxalement la rotation du TN n'a pas d'effet répulsif (pas de « force centrifuge ») au contraire!
- Orbites circulaires. La rotation du TN différencie les orbites en co-rotation de celles en contre rotation. Pour un TN critique l'orbite stable de rayon minimum est au niveau de l'horizon en co-rotation et neuf fois plus loin en contre rotation!

Chute libre vers un TN de Kerr

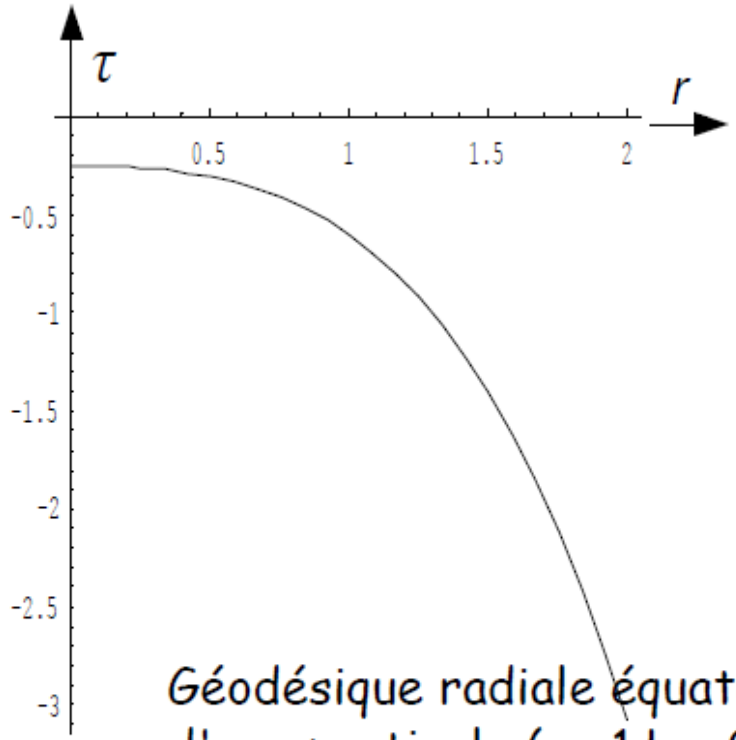
Approche par l'équateur: On tourne!



Equations géodésiques τ(r)



Géodésique radiale axiale d'une particule (e =1,L = 0) dans un TN de Kerr extremal,a=Gm=1



Géodésique radiale équatoriale d'une particule (e =1,L = 0) dans un TN Kerr extremal,a = Gm =1

$$\tau = -\frac{\frac{2}{3} r \sqrt{\frac{1+r^2}{r}} + \frac{4 (-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}}\, r^{3/2} \sqrt{\frac{1+r^2}{r}}\, \text{EllipticF}\left[i\, \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{3 (1+r^2)}}{\sqrt{2}}$$

$$\tau = -\frac{\frac{\sqrt{r^3 (1+r^2)} \left(\frac{4\sqrt{r}}{21} + \frac{2 r^{5/2}}{7}\right)}{r^{3/2}} - \frac{4 (-1)^{1/4} \sqrt{1-\frac{i}{r}} \sqrt{1+\frac{i}{r}} \sqrt{r^3 (1+r^2)}\, \text{EllipticF}\left[i\, \text{ArcSinh}\left[\frac{(-1)^{1/4}}{\sqrt{r}}\right], -1\right]}{21 \sqrt{r} (1+r^2)}}{\sqrt{2}}$$

Autres géodésiques équatoriales

(B.O'Neil, Kerr space Time, AK Peters)

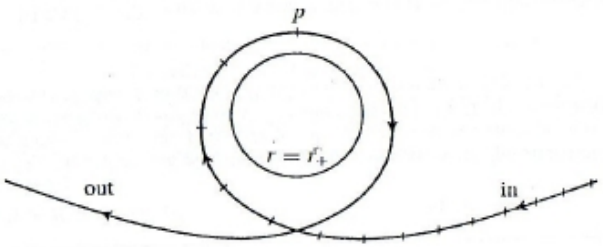


FIGURE 4.29. A timelike flyby orbit in the equatorial plane, with parameters $M = 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = 1$, $L = 4.2$. The circle represents the outer horizon $r = r_+ = 1.4$, so the orbit is in the Kerr exterior. The orbit is direct with $r_{min} \approx 2.16$. Analogous retrograde orbits would require $L < -8.5$.

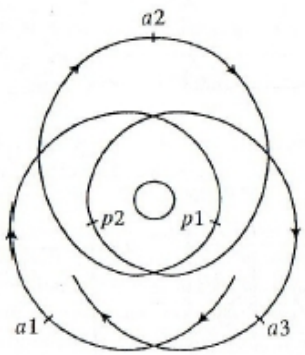


FIGURE 4.30. A timelike bound exterior orbit in the equatorial plane. (Parameters: $M = 1$, $a^2 = .84$, $e = E^2 - 1 = -.1$, $L = 3.1$.) The circle represents the outer horizon $r = r_+ = 1.4$. Three apcenters and two pericenters are shown: $a1$, $p1$, $a2$, $p2$, $a3$, with $r_{min} \approx 5.35$ and $r_{max} \approx 13.25$. The pericenter advance from $p1$ to $p2$ is about 142°.

Orbites polaires(B.O'Neil, Kerr space time, AK Peters)

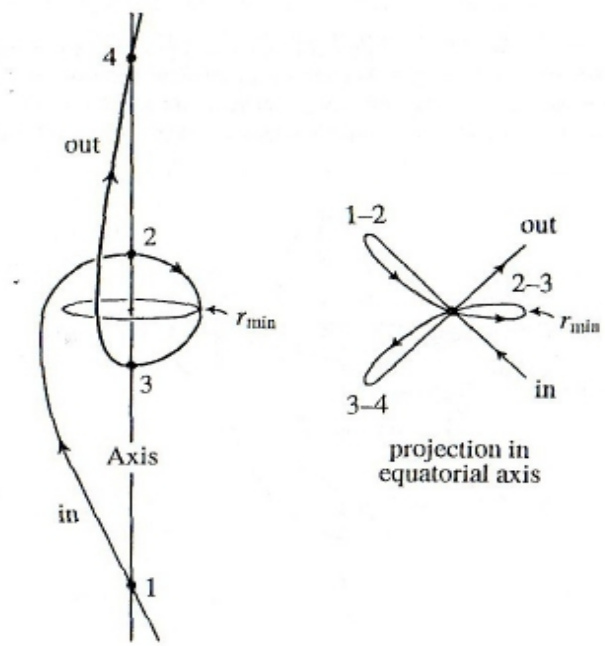


FIGURE 4.25. A timelike flyby polar orbit that meets the Axis four times. (Parameters: $M = 1$, $a^2 = .84$, $\mathcal{K} = 25 > K_1 \approx 15^+$, with $E^2 = 1.13456$, very close to $\Phi_{\mathcal{K}}(r_u) \approx 1.3484$.) The distant Axis crossings 1, 4 are at $r \approx 18.7$, the inner crossings 2, 3 at $r \approx 3.6$, with $r_{min} \approx 3.14$.

Apparence d'un TN de Kerr

(J. Bardeen Time like and null geodesics in Kerr Metric)

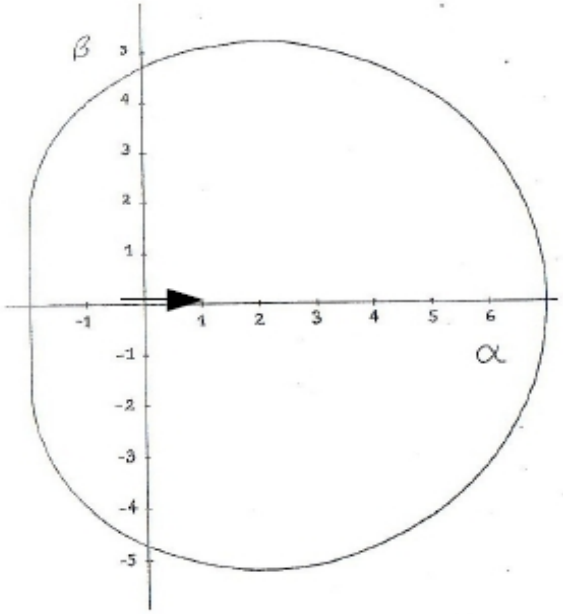
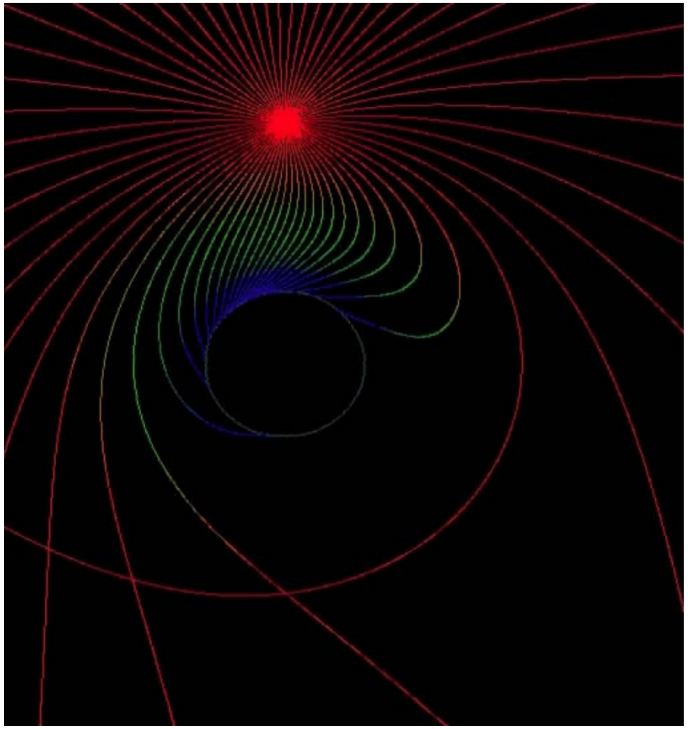


Figure 6. The apparent shape of an extreme ($a = m$) Kerr black hole as seen by a distant observer in the equatorial plane, if the black hole is in front of a source of illumination with an angular size larger than that of the black hole.



Vue de face: la source est derrière le TN : Un trou noir de 3 milliards de Masses solaires (M87) à 100al serait vu sous un angle de 2" environ !

Vue de dessus: Le TN « tourne » dans le sens trigonométrique, l'observateur est en bas de la figure.

L'observateur voit tourner le TN de gauche à droite. La dissymétrie est liée à cette rotation. Sur la droite les photons venant de derrière sont en contre rotation (l'orbite limite de non capture est plus au large que sur la gauche où les photons sont en co-rotation!

Energie négative dans Ergosphère

Ergosphère délimité par: $(r-GM)^2 = G^2M^2 - a^2\cos^2\theta$

- Energie conservée sur une géodésique:

$$E = -K_\mu p^\mu = m(1-2GM/r)\, dt/d\tau + 2\sin^2\theta . m(GMa/r) d\Phi/d\tau$$

- Dans l'ergosphère le vecteur K_μ est de type espace, on alors peut imaginer que $-K_\mu p^\mu < 0$. L'énergie (totale) d'une particule peut être négative!
- Possibilité d'extraire de l'énergie, jusqu'à 29% pour un TN de Kerr critique par le procédé de Penrose.
- L'énergie d'une géodésique est négative si :

$$\Delta\, (d\Phi/dt) = (d\Phi/dt_{\text{(maximum énergie négative)}} - d\Phi/dt_{\text{(minimum : entraînement référentiel}}) > 0$$

Energie négative dans Ergosphère

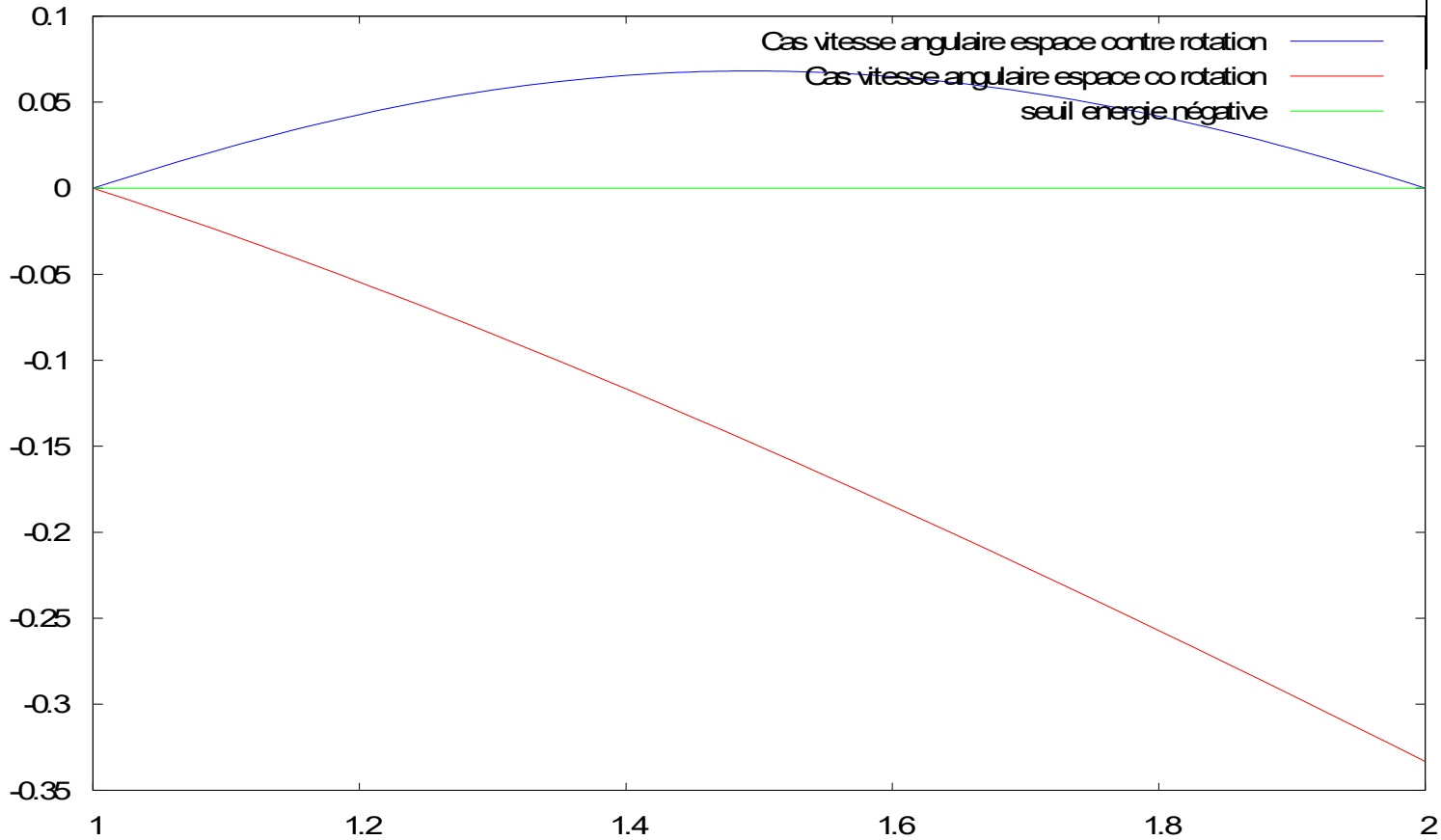


Figure 1 : On a représenté *Δ (dΦ/dt)* en fonction de ***r.*** Pour un TN de Kerr critique, on voit que **Δ (dΦ/dt)** n'est positif dans l'ergosphère que pour des particules en contre rotation. Ceci n'autorise une énergie négative qu'en contre rotation)

Masse irréductible

- Alors que sa définition à partir d'une vitesse angulaire de la <u>singularité</u> posait problème, le procédé de Penrose permet de donner une valeur physique au moment angulaire du TN, car le moment angulaire peut être transféré à un corps physique !
- Les paramètres du TN peuvent varier car on voit qu'on peut lui « emprunter » de l'énergie de rotation jusqu'à le rendre immobile (29%).
- La masse M comporte une partie $M_{irr} = A/16\pi G^2$, irréductible » où $A = 4\pi(r_+^2+a^2)$ est l'aire de l'horizon externe et que la surface de l'horizon (entropie) augmente toujours !

L'électron de Kerr-Newman

$$\vec{\mu} = \frac{1}{2}\sum_i e_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \vec{J} = \sum_i M_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \quad \vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{J} \quad \mu = g\frac{q}{2m}J \qquad (5\text{-}0\text{-}1)$$

Avec μ moment magnétique, J moment cinétique de ce même système et g facteur gyromagnétique défini de sorte qu'il vaille « 1 » dans ce cas classique.

- Le facteur gyromagnétique: g défini ci dessus par : $\mu = g.J(q/2m)$ d'un TN de Kerr Newman vaut 2 (comme l'électron), alors qu'il vaut 1 en mécanique classique. μ est le moment magnétique, J le moment cinétique, q la charge et m la masse.

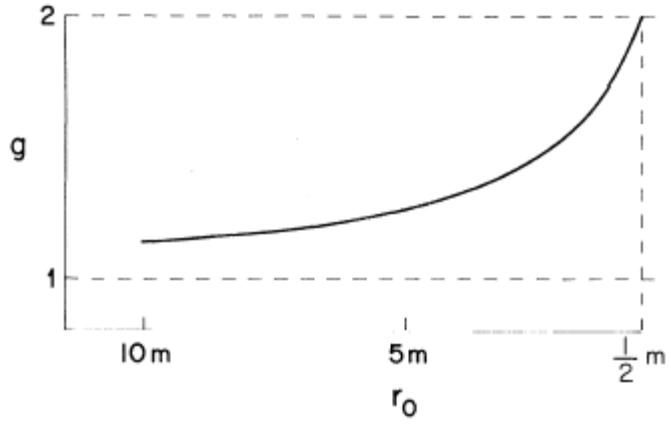


Figure 1 : Facteur gyromagnétique en fonction de r_0 (coordonnée radiale isotrope) pour un corps chargé en rotation lente. Pour $r_0 \gg m$, g approche la valeur classique de 1, mais quand la coquille approche son rayon de Schwarzschild $m/r_0 \to \frac{1}{2}$ le facteur gyromagnétique tend vers 2.

L'électron de Kerr-Newman

- On peut alors définir un TN de Kerr Newman de paramètres de charge, spin et masse de l'électron
- Solution sans horizons (fast Kerr): Violation de conjecture de censure cosmique: Réalité physique ?
- Taille du TN de Kerr: rayon de Compton de l'électron≈ 10^{22} lp .

Le 4ème invariant de Carter K_c

- L'équation de Hamilton Jacobi $g^{ij}\frac{\partial s}{\partial x^i}\frac{\partial s}{\partial x^j}+m^2c^2=0$ où ***s*** est une action dérivée du Lagrangien $\mathscr{L}=\frac{1}{2}g_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}.$ se sépare miraculeusement.
- Ceci est révélateur d'une symétrie des espaces temps de type D liée à l'existence d'un tenseur de Killing $K_{\mu\nu}$.
- L'invariant est quadratique vis-à-vis de l'impulsion. Le scalaire défini par $K_{\mu\nu}p^\mu p^\nu$ est égal à une constante ***K***.
- La valeur complexe de cet invariant $\boldsymbol{K} = K_c - m^2c^2a^2 + (\varepsilon.a - l)^2$ met en évidence le caractère non inertiel des coordonnées de Boyer Lindquist.
- L'interprétation physique à la limite Newtonienne montre un centre de symétrie particulier à chaque point et un couplage moment angulaire énergie par l'espace temps en « rotation ».

Le 4ème invariant de Carter K_c

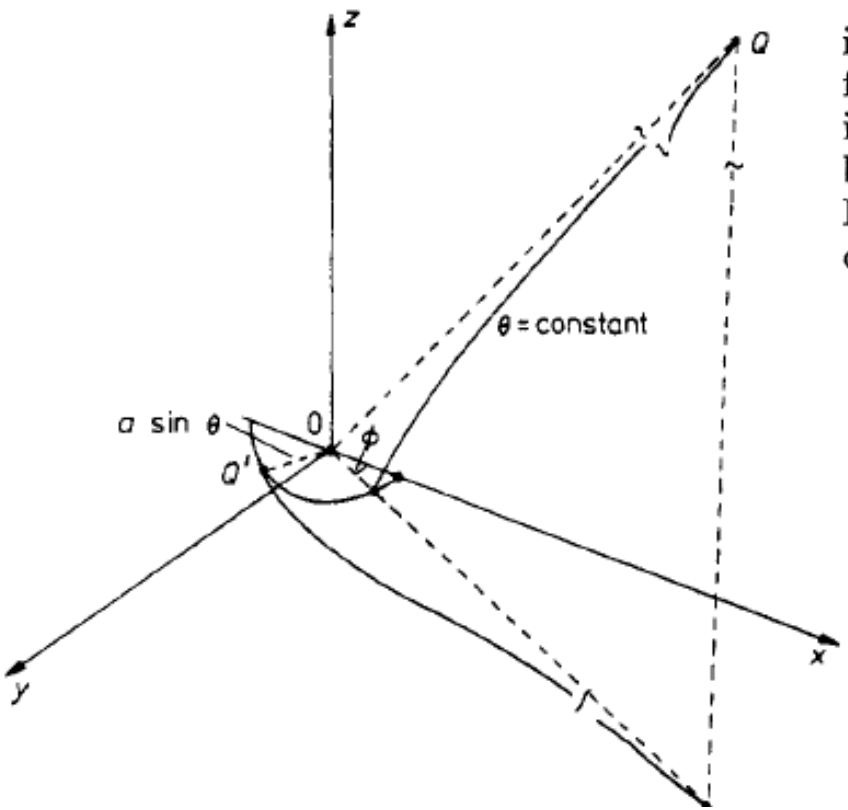


Figure 1.

In order to tackle the general case, a fourth first integral of the motion is needed which cannot come from the obvious symmetries of the metric. However, it turns out that it is possible to obtain such an integral by taking advantage of the unexpected fact that the Hamilton-Jacobi equation can be solved by separation of variables in the coordinate system (1), and with the choice of gauge (37). (The method would also work in in the Boyer-Lindquist coordinates with the analogous choice of vector potential, but a transformation involving the nonignorable coordinates r, θ would destroy the separability.)

B. Carter : Global structure of the Kerr family gravitationnal fields. Phys. Rev 1968

$$K = K_c - m^2c^2a^2 + (\varepsilon.a - l)^2$$

$$K = M_{\infty}^2 - 2alc\left\{\left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right) - \left[\left(\frac{\epsilon}{mc^2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\right\}$$
(Q')

La machine temporelle

PHYSICAL REVIEW VOLUME 174, NUMBER 5 25 OCTOBER 1968

Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields

BRANDON CARTER*
Department of Applied Mathematics and Theoretical Physics, University of Cambridge, Cambridge, England
(Received 29 March 1968)

The Kerr family of solutions of the Einstein and Einstein-Maxwell equations is the most general class of solutions known at present which could represent the field of a rotating neutral or electrically charged body in asymptotically flat space. When the charge and specific angular momentum are small compared with the mass, the part of the manifold which is stationary in the strict sense is incomplete at a Killing horizon. Analytically extended manifolds are constructed in order to remove this incompleteness. Some general methods for the analysis of causal behavior are described and applied. It is shown that in all except the spherically symmetric cases there is nontrivial causality violation, i.e., there are closed timelike lines which are not removable by taking a covering space; moreover, when the charge or angular momentum is so large that there are no Killing horizons, this causality violation is of the most flagrant possible kind in that it is possible to connect any event to any other by a future-directed timelike line. Although the symmetries provide only three constants of the motion, a fourth one turns out to be obtainable from the unexpected separability of the Hamilton-Jacobi equation, with the result that the equations, not only of geodesics but also of charged-particle orbits, can be integrated completely in terms of explicit quadratures. This makes it possible to prove that in the extended manifolds all geodesics which do not reach the central ring singularities are complete, and also that those timelike or null geodesics which do reach the singularities are entirely confined to the equator, with the further restriction, in the charged case, that they be null with a certain uniquely determined direction. The physical significance of these results is briefly discussed.

La machine temporelle

To sum up, in the case when $a^2+e^2>m^2$, the central region has the properties of a time machine. It is possible, starting from any point in the outer regions of the space, to travel into the interior, move backwards in time ($\hat{t}$) as far as desired, at a rate up to $2\pi|a|$ per revolution about the axis, and then return to the original position. (By keeping the motion at all stages sufficiently close to the light cone, the proper time involved in the process could be kept below any given nonzero limit, although this would not be possible if some sort of bound were to be placed on the allowed acceleration.)

La machine temporelle

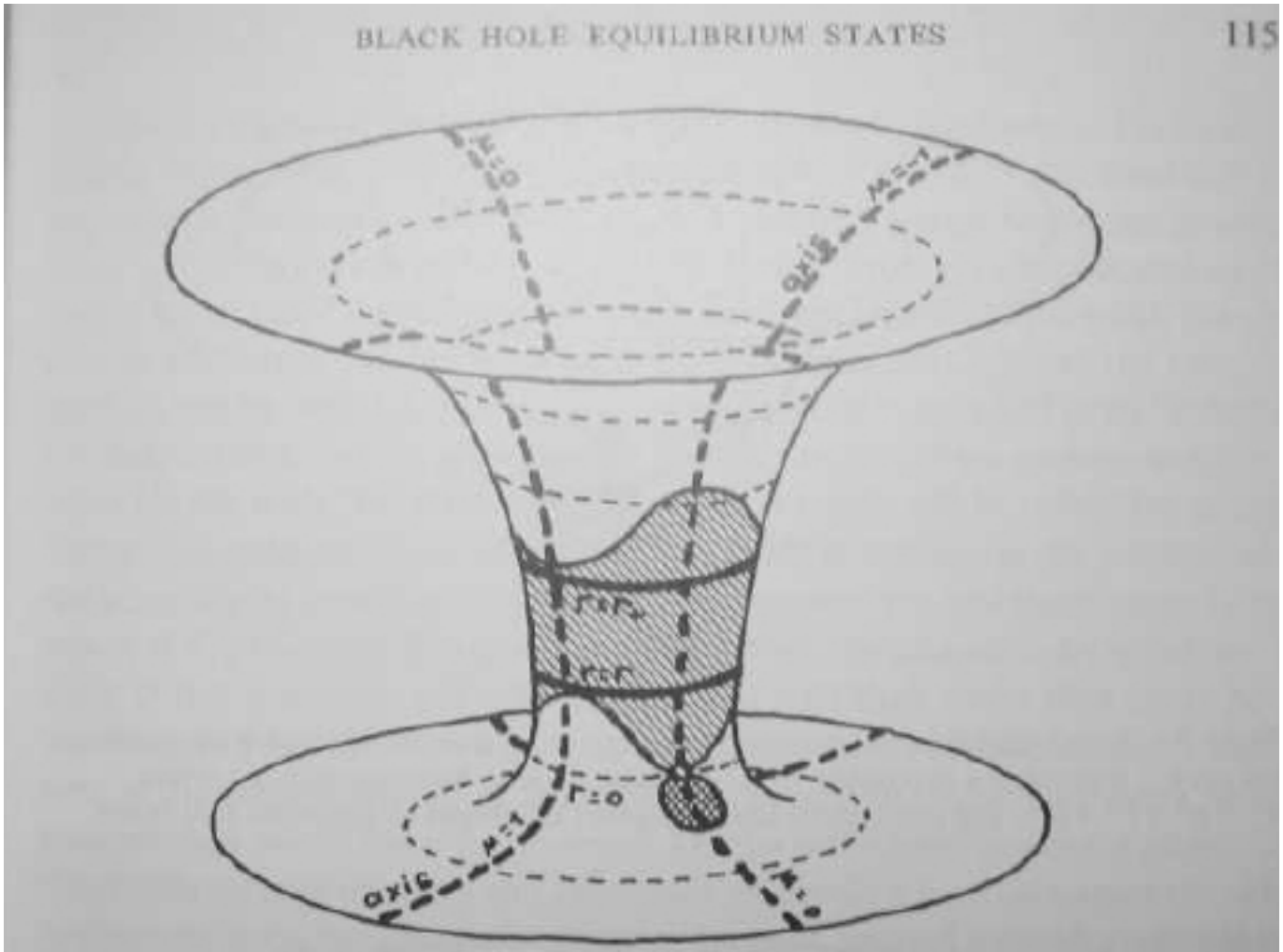


Figure 7.4. Rough sketch in perspective of a polar 2-section in which v and $\tilde{\varphi}$ are constant through a maximally extended Kerr solution when $M^2 > a^2$

La machine temporelle

Une section à t et φ constants de l'espace temps de Kerr est représenté sur la diapo précédente. La coordonnée r se lit les « méridiens » sur la surface de type hyperboloïde (à μ constant). La coordonnée θ est en représentation polaire ($\mu = cos\theta$). On voit en particulier les horizons extérieur (r_+) et intérieur (r_-), la singularité (point à $r = 0$ et $\mu=0$ qui est un point de l'anneau), la machine temporelle petite zone hachurée sous la singularité (cette représentation n'en montre pas la topologie torique), les ergosphères, zones hachurées, au dessus de (r_+) et au dessous de (r_-), l'axe de rotation ($\mu = 1$).

La machine temporelle

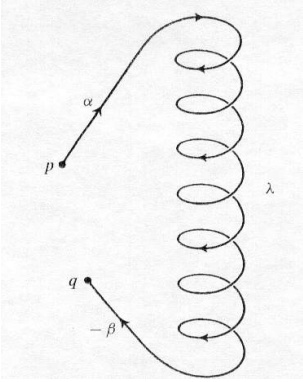
- Il y a une Zone où 2 dimensions sont de type temps.
- Cette zone de topologie torique bordée en son intérieur par la singularité, entièrement dans l'anti univers pour Kerr, débordant dans l'univers pour Kerr Newman, est entièrement en région III (sous l'horizon interne de Cauchy). Elle est définie par la condition $d\tau^2>0$ avec $dt^2\leq 0$ ce qui implique que dans la métrique $g_{\varphi\varphi}\leq 0$, soit :

  $(r^2+a^2)+(2mr-e^2)a^2\sin^2\theta/\rho^2<0$: Cas avec horizon ($a^2+e^2\leq m^2$).
- Délimitée par hypersurface singulière où la vitesse de rotation de l'espace : $\frac{d\Phi}{dt}=\frac{-g_{t\Phi}\pm\sqrt{g_{t\Phi}^2-g_{tt}g_{\Phi\Phi}}}{g_{\Phi\Phi}}$

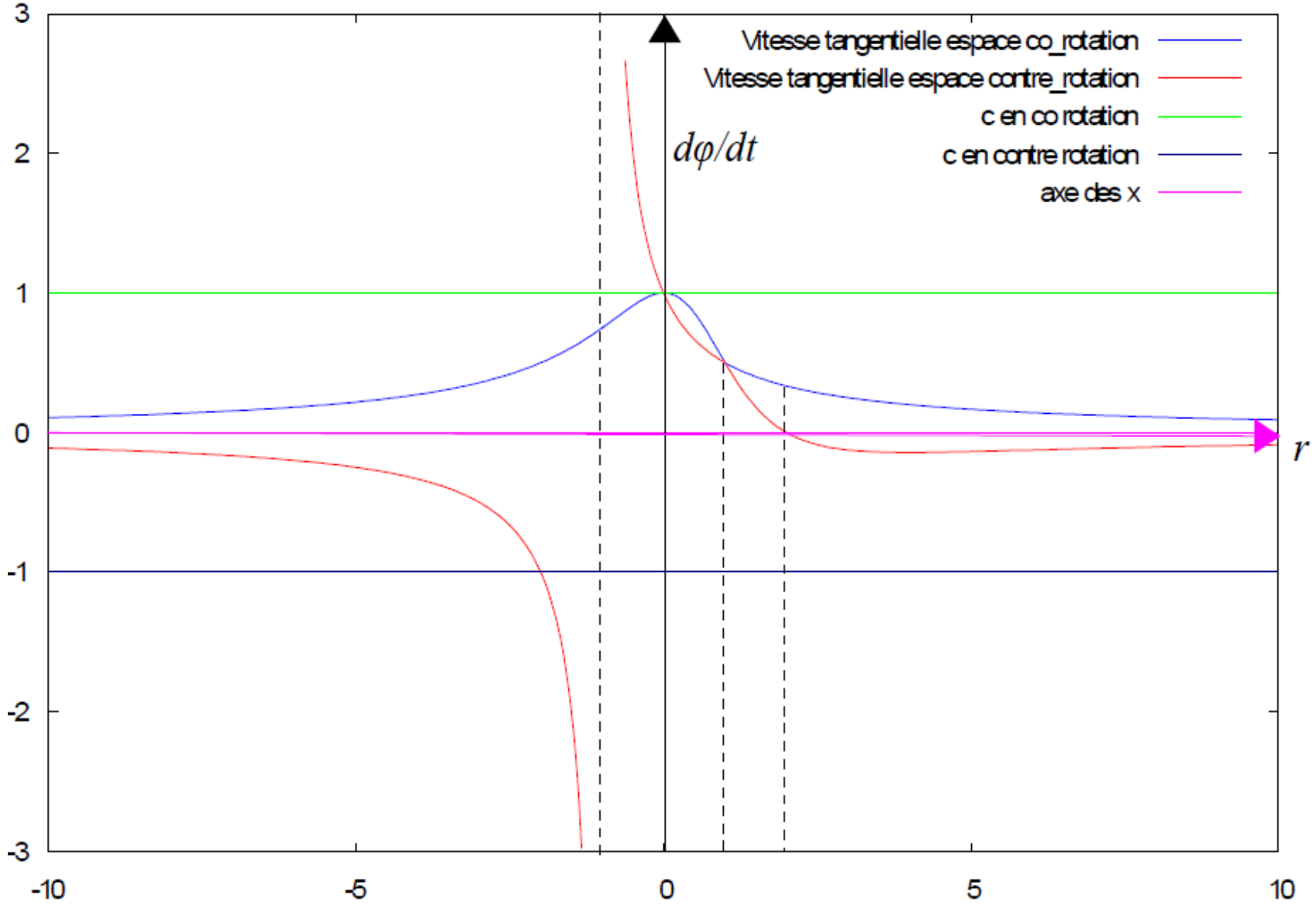
  devient infinie et où le sens de rotation en contre rotation s'inverse de façon discontinue.

Violation causalité

- B. Carter nous indique qu'il est possible de «remonter » le temps en tournant en sens contraire de ***a***.
- Alors dans toute la région III, en orbitant dans la zone critique pour se constituer un capital temps négatif et en voyageant à une vitesse proche de la lumière, il est possible qu'un point évènement A soit à la fois dans le passé et le futur d'un autre point évènement B.
- La Causalité est violée de façon la plus flagrante.



Vitesse angulaire d'un TN critique



Vitesse angulaire (TN non critique)

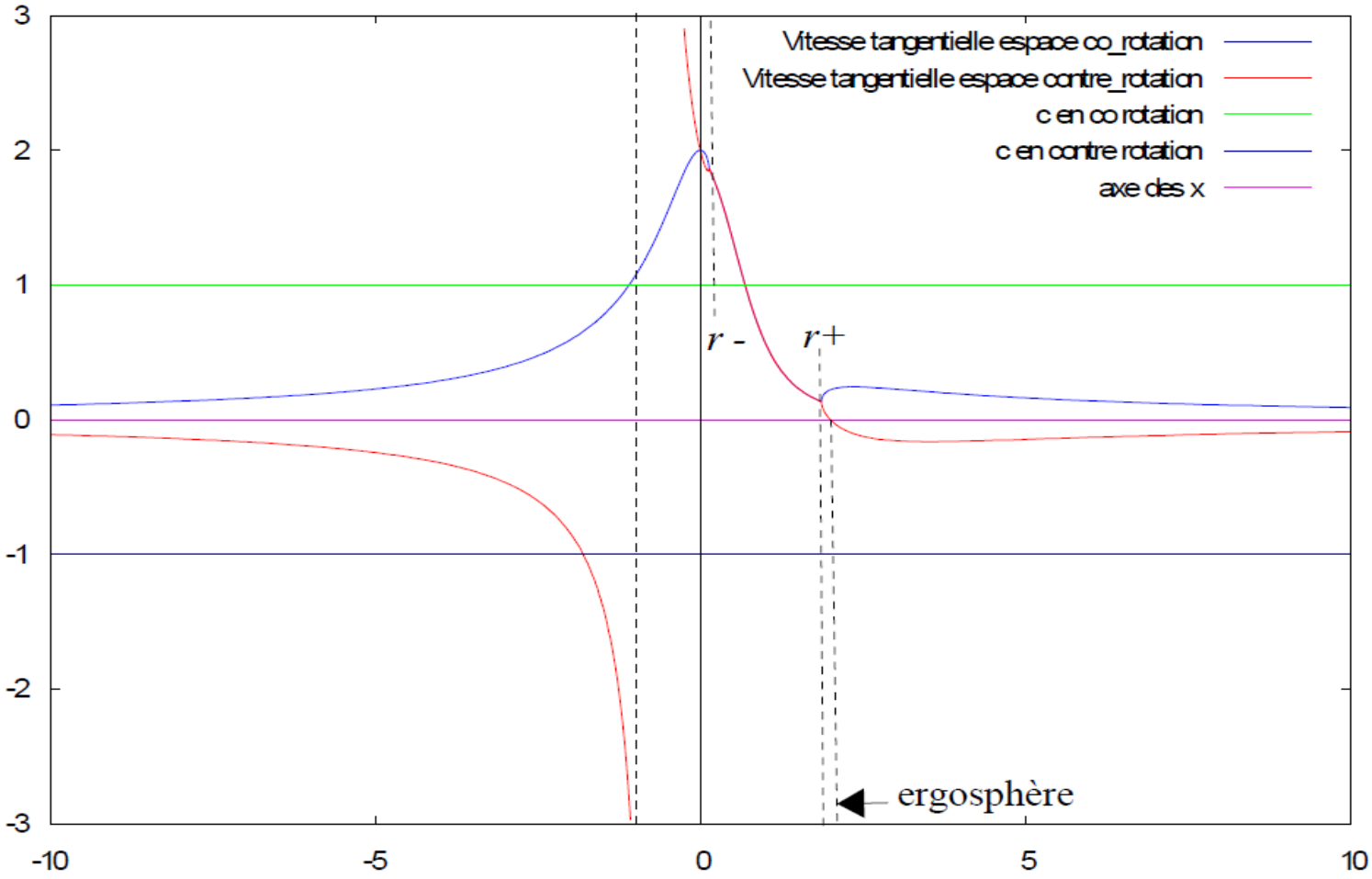
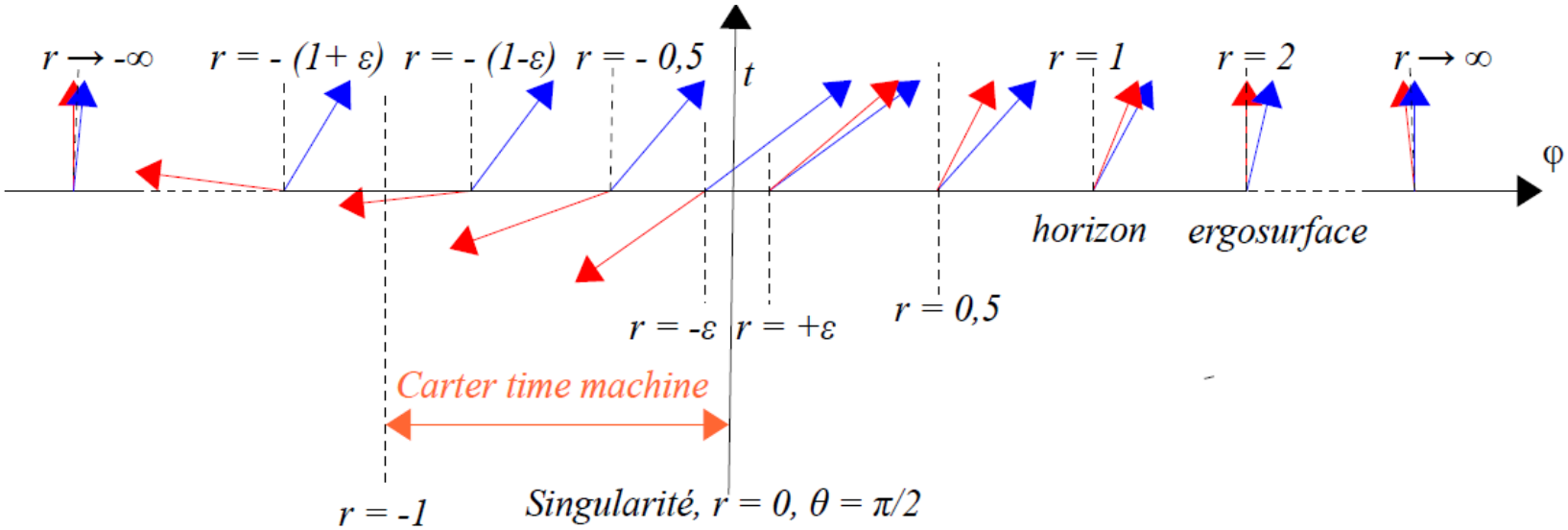


Figure 2 : Vitesse angulaire d'un TN avec *G, c =1, a = M/2 =1/2*

Vitesse angulaire (TN non critique)

Nous avons étudié dans ce chapitre différentes représentations de la phénoménologie particulière de cet espace temps. A partir du diagramme ci dessus nous pouvons représenter cela par une séquence de cônes de lumière (tangentiels) qui montre leur évolution en fonction de r pour quelques valeurs représentatives.

L'axe horizontal des φ croissants est orienté vers la droite et l'axe vertical des t croissants vers le haut. Le rayon en co-rotation est en bleu et celui en contre rotation est en rouge.



On voit l'évolution de la géométrie des cônes de lumière $d\varphi/dt$ lorsque r varie.

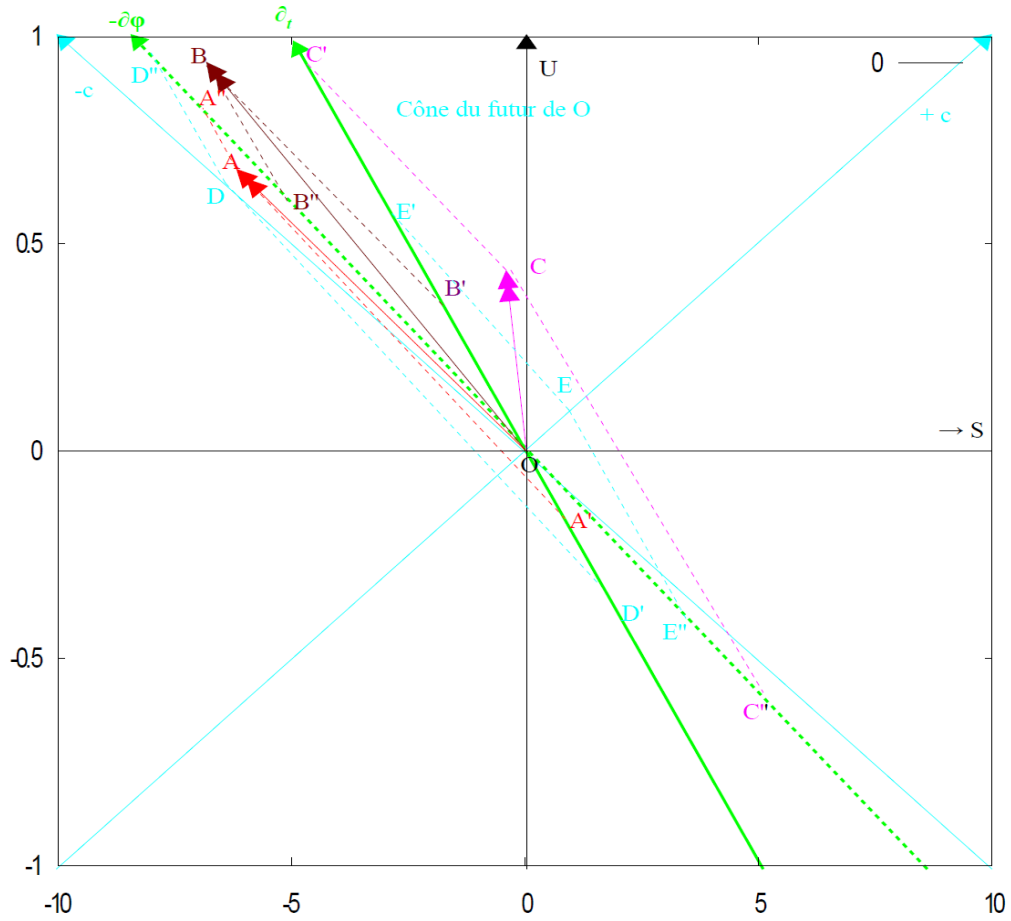
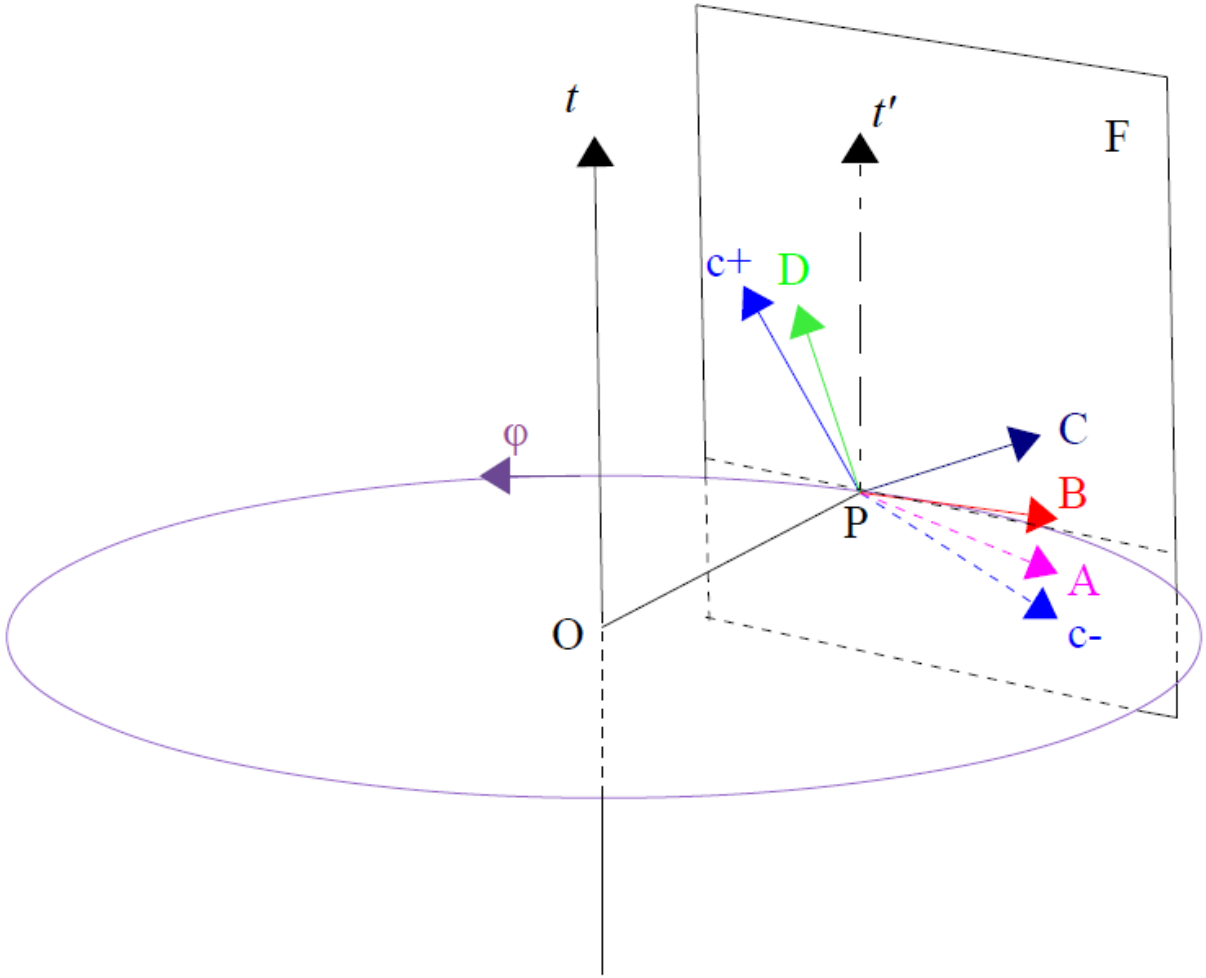


Figure 4: Zoom « fonctionnel » sur le cas $r = -0,5$. Dans le plan U,S, on a représenté:

Le cône de lumière $-c$, $+c$ (turquoise clair).
On voit que les géodésiques nulles issues de O sont à l'extérieur du secteur (∂_t, ∂_φ) définissant la base locale des coordonnées de Boyer Lindquist.
Le futur de O est dans le cadran supérieur délimité par ces droites.
La coordonnée t localement en O, (en vert pour r = -0,5) colinéaire du vecteur de base ∂_t.
La coordonnée φ localement en O (en vert pointillé) colinéaire du vecteur ∂_φ.
L'orientation donnée par la flèche correspond à $-\partial_\varphi$.
Une ligne d'univers locale en O qui « remonte le temps », dite critique, est représentée par un vecteur double fléché en rouge.

Boucle temporelle à r = cste



Ci dessus on a représenté une ligne d'univers à $r = OP$ = constante, t = constante en magenta foncé et $\theta = \pi/2$, définissant un plan dans l'espace .

Le sens de rotation (trigonométrique) de φ est donné par une flèche. En P on a représenté une ligne parallèle à t (trait noir interrompu long) notée t', une coupe du cône de lumière ($c+$ et $c-$ en bleu clair, ce dernier étant en pointillé pour montrer qu'il est sous le plan défini par le cercle) par le plan perpendiculaire à OP en P donc tangent au cercle. De ce fait c+ et c- définissent un plan F.

On note la dissymétrie du cône de lumière par rapport à l'axe t.

En P on a représenté localement 4 observateurs de 4-vitesse PA, PB, PC, PD de couleurs différentes. Ces vecteurs sont tous dans le plan défini par c+ et c-.

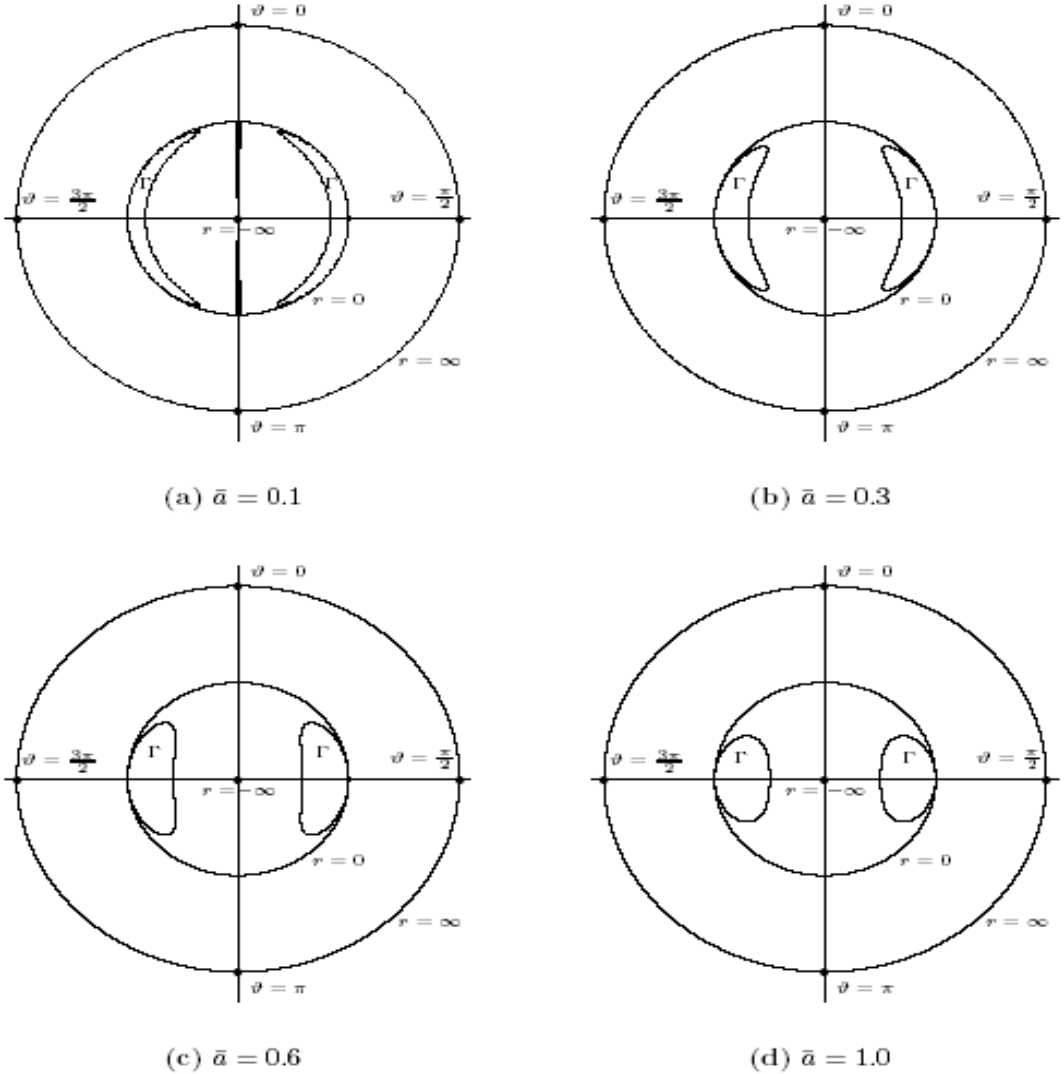
L'observateur A suit une ligne d'univers en contre rotation qui « remonte » localement le temps, comme son vecteur local de 4-vitesse en pointillé l'indique (sous le plan défini par la boucle temporelle. Cette ligne d'univers est en délicatesse avec la causalité. La ligne d'univers globale n'est pas représentée mais elle est facile à imaginer.

L'observateur B suit une ligne d'univers (le cercle de rayon OP) en contre rotation qui est une boucle temporelle, (vecteur 4-vitesse tangent au cercle de rayon OP), également en délicatesse avec la causalité !

L'observateur C suit une ligne d'univers en contre rotation qui suit localement le temps (respecte la causalité).

L'observateur D suit une ligne d'univers en co-rotation qui suit localement le temps qui est également respectueuse de la causalité.

Forme de la machine temporelle



(a) $\bar{a} = 0.1$ (b) $\bar{a} = 0.3$

(c) $\bar{a} = 0.6$ (d) $\bar{a} = 1.0$

Décrivons une boucle temporelle

- Partant de la région de Type I, il faut se rendre sur l'axe, à bonne distance du TN.
- Il faut acquérir une énergie cinétique proche de l'énergie de masse pour franchir la barrière de potentiel.
- Ayant atteint la région III (en supposant qu'on a survécu au blueshift sur r-), on décrit des orbites circulaires dans la machine temporelle.
- Même dans un cas très favorable (TN très massif, critique), on subit des accélérations énormes > 10^7 m/s^2 pour M=a = 10^7 M.solaires, ce qui conduit à des solutions irréalistes.

Décrivons une boucle temporelle

- **1-Introduction**

Une trajectoire, représentée par une courbe paramétrée $x^{\mu}(\lambda)$, où x^{μ} (t, φ, r, θ), pour être une boucle temporelle, doit être de type temps (le temps propre de « l'observateur » attaché à cette trajectoire doit être positif soit en signature + - - -) :

$$g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu} > 0 \qquad (12\text{-}1\text{-}1)$$

En considérant t, r et θ constants, on peut paramétrer la trajectoire comme suit :

$$x^{\mu}(\lambda) = (t_0, -\lambda+\varphi_0, r_0, \theta_0) \qquad (12\text{-}1\text{-}2)$$

Avec: $$0 < \lambda < 2\pi \qquad (12\text{-}1\text{-}3)$$

Pour une révolution.

En général, dans cette formule, on omet les constantes t_0, φ_0, r_0, $\theta 0$ qui peuvent être égalées à zéro, par un changement d'origine des coordonnées, sans nuire à la généralité du problème. Comme on s'en doute une telle trajectoire n'a rien d'une géodésique et pour s'y maintenir, il va falloir lutter contre des accélérations provoquées par le voisinage de la singularité.

Décrivons une boucle temporelle

- **Début du voyage**

Imaginons que des astronautes intrépides veuillent goûter aux délices des boucles temporelles, nul doute qu'il y aura sûrement des amateurs, au vu des défis parfois extravagants qu'on constate dans notre bas monde.

Pour orbiter sur des boucles temporelles, il faut déjà se rendre dans la zone où elles se produisent. Si on part de l'univers positif (région de type I) dans un vaisseau spatial, l'accès le plus simple à cette zone étant par l'axe du trou noir, il convient d'abord d'atteindre cet axe à bonne distance du trou noir. De là il faut prendre de l'élan pour franchir, en vol inertiel, la barrière de potentiel générée par la singularité du trou noir (cf. chapitre 7-3), en traversant au passage les deux horizons (externe et interne qui peuvent être confondus dans le cas d'un trou noir critique), nonobstant les périls déjà signalés. En pénétrant à l'intérieur de l'anneau en son centre (on va choisir un trou noir qui s'y prête) en rallumant les moteurs pour exécuter un rapide virage sur l'aile on va pouvoir atteindre la zone désirée. On a vu que pour un trou noir critique il fallait « brûler » une énergie de l'ordre de grandeur (70%) de l'énergie de masse du vaisseau pour franchir la barrière de potentiel. En fait on devrait en consommer un peu moins du fait qu'on ne va pas très loin dans l'anti-univers pour manœuvrer et orbiter sur une boucle temporelle.C'est à ce dernier point qu'on va s'intéresser plus particulièrement.

Décrivons une boucle temporelle

- **Calcul des contraintes subies par les voyageurs**

Dans notre exemple nous considérons un trou noir de Kerr ($Q = 0$) donc les seules interactions en présence sont gravitationnelles.

Pour bien préciser les choses, rappelons qu'au voisinage du trou noir (comme de toute masse) on est l'objet de plusieurs phénomènes :

Des « forces » de marées, que l'on subit même si on est sur une géodésique (en chute libre),

Et des « forces » d'accélération (qu'on subit que si on n'est pas sur une géodésique: c'est-à-dire si on n'est pas en chute libre)

Il faut évidemment calculer les deux.

Décrivons une boucle temporelle

- **Forces de Marée**

On rappelle que ces forces sont liées à la déviation géodésique qui fait que les géodésiques ne restent pas parallèles quand on se rapproche du corps massif, ce qui fait que si le corps est rigide il va subir des contraintes. Ces forces s'exercent indépendamment de la présence d'une accélération (elles sont donc ressenties sur une trajectoire inertielle « chute libre »)

Le calcul des forces de marée nécessite de calculer le tenseur de Riemann dans le vide (il se réduit au tenseur de Weyl) c'est un calcul assez lourd qui est fait [40], [37] et en annexe 17. On le calcule en général dans un référentiel particulier (dans une tétrade de vecteurs nuls : formalisme de Newman-Penrose) où il prend sa forme la plus simple (qui permet de calculer alors simplement la composante radiale et la composante transversale).

On le projette ensuite sur la tétrade comobile attachée aux « voyageurs », les forces de marée, devant s'évaluer dans le référentiel localement inertiel. En fait il n'y a que deux composantes à calculer dans ce référentiel : La composante longitudinale et la composante transversale.

Pour un trou noir de Kerr Newmann, elles sont données respectivement par :

$$\begin{aligned} T_{\text{long}} &= -\frac{ml}{8w^2M^2}\frac{1}{(\bar{r}^2+\bar{a}^2)^3}\left[2\bar{r}(\bar{r}^2-3\bar{a}^2)-\bar{Q}(3\bar{r}^2-\bar{a}^2)\right], \\ T_{\text{trans}} &= \frac{m}{8lM^2}\frac{1}{(\bar{r}^2+\bar{a}^2)^3}\left[\bar{r}(\bar{r}^2-3\bar{a}^2)-\bar{Q}(\bar{r}^2-\bar{a}^2)\right]. \end{aligned} \tag{3.31}$$

En posant:

$$\begin{aligned} r &= M\bar{r}, \\ a &= M\bar{a}, \\ Q &= M\bar{Q}. \end{aligned} \tag{3.30}$$

Décrivons une boucle temporelle

Par ailleurs *m* est la masse, *l* la longueur dans la direction radiale, et *w* la largeur et la profondeur (supposées identiques) de l'objet subissant le stress. Posons $Q = 0$, prenons un Trou noir critique $a = GM$ (ce sont les plus favorables à nos voyages temporels) de 10^7 = *masses solaires* = 2.10^{37} *kg*. Posons $r = a/2$.

Pour un vaisseau spatial prenons $l = 100m$, $m = 100$ *tonnes*, $w = 100m$ avec les facteurs dimensionnels entre crochets rajoutés pour respecter l'équation aux dimensions.

$$\{100.10^{5}.(0,25^{-3})/8.10^{4}.4.10^{74})(1,25)^{3}\}x\,[(G^{-2})(c^{6})] = +\,0,88.10^{-1}\ N/m^{2} \qquad (12\text{-}6\text{-}2)$$

Ce qui est un stress totalement négligeable : Remarquons le signe « + » car nous sommes dans l'anti-univers.

Ce n'est donc pas de là que viendront les problèmes.

L'autre composante étant du même ordre de grandeur, inutile de le calculer. Il faut retenir que dans le contexte que nous considérons, ces forces de marées restent à un niveau tout à fait raisonnable, si on ne s'approche pas trop de la singularité, hypothèse que nous respecterons dans nos calculs.

Décrivons une boucle temporelle

Accélération

Le module de la quadri accélération est défini par: $|A^\mu| = (g_{\mu\nu} A^\mu A^\nu)^{1/2}$ (12-7-1)

Pour calculer l'accélération physique il faut re-paramétrer la courbe par le temps propre s. Les dérivées doivent être exprimées par rapport au temps propre.

$$\frac{dx^\mu}{ds} = \frac{\dot{x}^\mu}{\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}},$$

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = \frac{\ddot{x}^\mu}{|g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b|}.$$

Les composantes de la quadri accélération sont définies par:

$$A^\mu = d^2x^\mu / ds^2 + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} (dx^\alpha/ds)(dx^\beta/ds)$$

Par contre on va voir que dans nos hypothèses, pour orbiter sur des boucles temporelles, on subit une « accélération » très importante, accélération qui non seulement met à mal l'observateur et son environnement, mais à laquelle il va falloir s'opposer pour rester sur l'orbite (moteur de fusée allumé).

Précisons un peu plus la nature de cette accélération

En Relativité générale, on fait souvent référence à différentes accélérations spécifions bien celle qui doit être prise en compte.L'accélération « ressentie » par l'observateur est le « module » de la quadri accélération :

C'est l'accélération dans le référentiel local inertiel attaché à l'observateur, puisque dans ce référentiel, le temps propre se confond avec la coordonnée temps, du fait que l'observateur est « immobile » dans ce référentiel. C'est donc ceci qu'il nous faut calculer :

Décrivons une boucle temporelle

Calcul du module de l'accélération :

Métrique de Kerr Newman en coordonnées de Boyer Lindquist, en signature (+, -, -, -):

$$ds^2 = \left[\frac{(\Delta - a^2.\sin^2\theta)}{\rho^2}\right].dt^2 + \left[\frac{2a.\sin^2\theta(r^2+a^2-\Delta)}{\rho^2}\right].dt.d\varphi - \frac{\sin^2\theta[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta]}{\rho^2}d\varphi^2 - \frac{\rho^2}{\Delta}.dr^2 - \rho^2.d\theta^2$$

Avec: $\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2$, $\rho^2 = r^2 + a^2.\cos^2\theta$.

La métrique inverse vaut: $\partial^2/\partial_{s^2} = g^{11}\partial_t^2 + g^{13}\partial_t\,\partial_\varphi + g^{31}\partial_\varphi\,\partial_t - (\Delta/\rho^2).\partial_r^2 - \partial_\theta^2/\rho^2 + g^{33}\partial_\varphi^2$

On n'a explicité que les coefficients qui seront utilisés dans le calcul qui suit

Rappelons que nous considérons le cas « simple » où : $t, r, \theta = constante$, et où seul φ, que nous le paramétrons par le paramètre affine λ avec le signe « - » pour être homogène avec le cas où on peut remonter le temps pour indiquer qu'on tourne en sens contraire de celui du trou noir, varie.

On rappelle que ceci s'écrit: $x^\mu\,[t, \varphi, r, \theta] = [\,t_0, -\lambda, r_0, \theta_0\,]$

L'existence de ce type de courbe, et la contrainte qu'elle soit de type « temps » n'est possible que pour certaines valeurs des coordonnées, comme les calculs vont le montrer.

Il faut en particulier que $g_{\varphi\varphi} > 0$ pour satisfaire la condition donnée par (12-1-1)

Décrivons une boucle temporelle

De la définition de la quadri accélération:

$$A^{\mu} = \frac{d^2x^{\mu}}{ds^2} + \Gamma_{\alpha}{}^{\mu}{}_{\beta}\frac{dx^{\alpha}}{ds}\frac{dx^{\beta}}{ds} \qquad (12\text{-}8\text{-}4)$$

et du paramétrage de la trajectoire, en remarquant qu'il implique que le terme en dérivée seconde est nul (les coordonnées de la courbe paramétrée sont constantes ou linéaires), en utilisant les connexions dans ce cas ($Q = 0$, $\theta = \pi/2$), comme seul x^1, c'est-à-dire φ n'est pas constant, (12-8-4) se réduit à :

$$A^{\mu} = \Gamma_1{}^{\mu}{}_1\frac{dx^1}{ds}\frac{dx^1}{ds} \qquad (12\text{-}8\text{-}5)$$

Avec la liste des connexions non nulles[62], on voit que les seules connexions à prendre en compte sont donc: $\Gamma_1{}^{\mu}{}_1$, soit $\Gamma_{\varphi}{}^{r}{}_{\varphi}$ et $\Gamma_{\varphi}{}^{\theta}{}_{\varphi}$.
D'après (12-8-5), ceci indique que les seules composantes non nulles de A^{μ} sont A^{θ} et A^{r}. Calculons:

$$\Gamma_{\varphi}{}^{r}{}_{\varphi} = \tfrac{1}{2}(g^{r\lambda} (\partial_{\varphi} g_{\varphi\lambda} + \partial_{\varphi} g_{\varphi\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\varphi\varphi}) \qquad (12\text{-}8\text{-}6)$$

Les dérivées de la métrique par rapport à φ, sont nulles (elle ne dépend pas de φ), il n'y a pas de termes croisés en r, la formule devient:

$$\Gamma_{\varphi}{}^{r}{}_{\varphi} = - \tfrac{1}{2}(g^{rr} (\partial_r g_{\varphi\varphi})) \qquad (12\text{-}8\text{-}7)$$

Décrivons une boucle temporelle

Calculons aussi : $\Gamma_{\varphi}{}^{\theta}{}_{\varphi} = \frac{1}{2}(g^{\theta\lambda} (\partial_{\varphi} g_{\varphi\lambda} + \partial_{\varphi} g_{\varphi\lambda} - \partial_{\lambda} g_{\varphi\varphi})$ (12-8-8)

Les dérivées de la métrique par rapport à φ sont nulles, (elle ne dépend pas de φ) et comme il n'y a pas de termes croisés en θ dans la métrique inverse, la formule devient :

$$\Gamma_{\varphi}{}^{\theta}{}_{\varphi} = - \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_{\theta} g_{\varphi\varphi} = 0 \qquad (12\text{-}8\text{-}9)$$

Dans $g_{\varphi\varphi}$, tous les termes en θ sont soit en $\sin^2\theta$ soit en $\cos^2\theta$.
Leur dérivée fait donc intervenir des produits $\sin\theta \cos\theta$ qui sont nuls pour $\theta = \pi/2$.
Ces coordonnées sont constantes ou linéaires, la dérivée seconde dans (12-8-4) est nulle.
L'accélération s'évalue par rapport au temps propre:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{dx^1}{d\lambda}\frac{d\lambda}{ds}, \quad \frac{dx^1}{d\lambda} = -1 \text{ soit } \left(\frac{dx^1}{d\lambda^2}\right)^2 = 1,$$ [63]

Les autres $\frac{dx^{\mu}}{d\lambda}$ sont nuls, et: $\frac{ds^2}{d\lambda^2} = g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}$ (12-8-10)

L'équation (12-8-4) s'écrit : $A^{\mu}.(g_{\mu\nu} x'^{\mu} x'^{\nu}) = [0, 0, \Gamma_{\varphi}{}^{r}{}_{\varphi}, \Gamma_{\varphi}{}^{\theta}{}_{\varphi}]$ (12-8-11)

Décrivons une boucle temporelle

qui compte tenu de (12-8-7) et (12-8-9) devient: $A^{\mu}.(g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu}) = [0,\ 0,\ -\tfrac{1}{2}(g^{rr}(\partial_r g_{\varphi\varphi}),\ 0]$ (12-8-12)

La quadri accélération est définie par: $|A^{\mu}| = (g_{\mu\nu}A^{\mu}A^{\nu})^{1/2} = |A^{r}| = (g_{rr}A^{r}A^{r})^{1/2}$ (12-8-13)

du fait que seule la composante A^r n'est pas nulle, dans notre cas, on tire :

$$|A^{\mu}| = |\,[g_{rr}\{(g_{\varphi\varphi}x'^{\varphi}x'^{\varphi})^{-1}(-\tfrac{1}{2})(g^{rr})(\partial_r g_{\varphi\varphi})\}^2]^{1/2}\,| \qquad (12\text{-}8\text{-}14)$$

(Rappel pour $g_{\varphi\varphi}$, voir la métrique, On voit que dans nos hypothèses, la quadri accélération n'a qu'une composante, (on rappelle que pour $\theta = \pi/2,\ \partial_\theta g_{\varphi\varphi} = 0$). L'équation (12-8-13) devient:

$$|A^{\mu}| = |-\tfrac{1}{2}(g_{\varphi\varphi}x'^{\varphi}x'^{\varphi})^{-1}(g^{rr})(\partial_r g_{\varphi\varphi})(g_{rr})^{1/2}| \qquad (12\text{-}8\text{-}15)$$

Remarquons que comme on calcule une « valeur absolue », le signe « –» doit disparaître, ce qui est confirmé par l'élévation au carré et de l'extraction de racine carrée.On obtient une valeur absolue. Reste à déterminer le signe. J'ai supposé qu'on pouvait conserver le signe.
Mais il est prudent pour connaître le « sens » de l'accélération, d'utiliser d'autres critères, pour valider l'argument.

Comme : $(g^{rr})(g_{rr}) = \delta_r^r = 1$ (12-8-16)

On obtient finalement : $$|A^{\mu}| = \left|\frac{-(g^{rr})^{1/2}\,\partial_r g_{\varphi\varphi})}{2(g_{\varphi\varphi}x'^{\varphi}x'^{\varphi})}\right| \qquad (12\text{-}8\text{-}17)$$

Avec: $$g^{rr} = \frac{-\Delta}{\rho^2} \qquad (12\text{-}8\text{-}18)$$

Décrivons une boucle temporelle

De (12-8-17) on voit que dans ce contexte de boucle temporelle, l'accélération présente une singularité sur la surface du tore délimitant la machine temporelle puisque lorsque $g_{\varphi\varphi} = 0$, $|A^\mu|$ devient infini.
Nous avions déjà noté au chapitre 9-1-8 que la surface délimitant cette zone était singulière. Nous retrouvons ce phénomène ici dans le contexte particulier des boucles temporelles.

Calculons $| A^\mu |$. Rappelons que dans les calculs qui suivent $\theta = \pi/2$, donc $\sin\theta = 1$ et $\cos\theta = 0$ donc $\rho^2 = r^2$.

$$(\partial_r g_{\varphi\varphi}) = \partial_r\left[\frac{(r^2-2Mr+a^2)a^2-(r^2+a^2)^2}{r^2}\right] = \partial_r\left[a^2 - \frac{2Ma^2}{r} + \frac{a^4}{r^2} - r^2 - \frac{a^4}{r^2} - 2a^2\right] = \partial_r\left[-a^2 - \frac{2Ma^2}{r} - r^2\right] = \frac{2Ma^2}{r^2} - 2r$$

$$[g^{rr}]^{1/2}(\partial_r g_{\varphi\varphi}) = \frac{(-\Delta)^{1/2}}{(\rho^2)^{1/2}}\left(\frac{2Ma^2}{r^2} - 2r\right) = \frac{(-r^2+2Mr-a^2)^{1/2}}{r}\left(\frac{2Ma^2}{r^2} - 2r\right) \qquad (12\text{-}8\text{-}19)$$

Avec: $x'^\mu\,[t,\varphi,r,\theta] = [\,0, -1, 0, 0\,]$, on a $g_{\mu\nu}x'^\mu x'^\nu = g_{\varphi\varphi}.(-1)(-1) = g_{\varphi\varphi}$

$$g_{\varphi\varphi} = \left[\frac{\Delta.a^2-(r^2+a^2)^2}{r^2}\right] = \left[\frac{(r^2-2Mr+a^2).a^2-(r^2+a^2)^2}{r^2}\right] = -\left(a^2 + \frac{2Ma^2}{r} + r^2\right)$$

Au passage, on voit que pour que $g_{\varphi\varphi} > 0$, condition pour que la trajectoire soit de type temps, il faut que $r < 0$ et de valeur absolue petite pour que le terme en $1/r$ soit prépondérant.

$$| A^\mu | = \frac{-(-1 + 2M/r - a^2/r^2)^{1/2}\,(2Ma^2/r^2 - 2r))}{-2(a^2 + 2Ma^2/r + r^2)} = \frac{-(-1 + 2M/r - a^2/r^2)^{1/2}\,(2Ma^2 - 2r^3))}{-2(a^2r^2 + 2Ma^2r + r^4)}$$ soit:

$$| A^\mu | = \frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2}\,(Ma^2 - r^3))}{(a^2r^2 + 2Ma^2r + r^4)} \qquad (12\text{-}8\text{-}20)$$

Décrivons une boucle temporelle

Remarquons que dans ce système d'unités « naturelles » que nous avons adopté où a, M, r ont « la même dimension » (on exprime r et a en fonction de M et n'oublions pas qu'en Relativité Générale, à une masse on peut naturellement associer une longueur, le « rayon de Schwarzschild », $|A^{\mu}|$ varie en $1/M$, ce qui signifie que l'accélération auquel on est soumis est inversement proportionnelle à la masse du trou noir, ce qui n'est pas surprenant et est bien cohérent avec les résultats connus sur les trous noirs.
Par ailleurs, nous avions déjà remarqué, que ce résultat était insensible au sens de rotation, comme la métrique le suggérait, puisque pour $r << a$ et $\theta = \pi/2$, la métrique peut s'écrire au premier ordre :

$$ds^2 \approx a^2(1+2GM/r)d\varphi^2$$

Expression qui est indifférente au signe de $d\varphi$. On verra que ce ne sera pas le cas si on veut décrire des trajectoires qui remontent le cours du temps (comme dt n'est pas nul, le produit croisé n'est pas nul), il faudra dans ce cas décrire des trajectoires en «contre rotation ».

Décrivons une boucle temporelle

9- Application numérique

On a utilisé le système d'unités naturelles $c = G = 1$ pour l'application numérique, il faut retourner au système MKS.
L'accélération $|A^\mu|$ se mesure en m/sec^2 soit $[L][T]^{-2}$.
Le moment angulaire spécifique du trou noir « a » vaut $a = J/Mc$ avec J moment angulaire donné par l'intégrale de Komar, du trou noir.
Avec cette définition, a a la dimension d'une longueur.
La masse M du trou noir est prise égale à 10^7 masses solaires.

A) Calcul pour a = M/2 et r = -M/2

$$A)\ |A^\mu| = |A^r| = -\frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2}\,(Ma^2 - r^3))}{(a^2r^2 + 2Ma^2r + r^4)} = -\frac{(1+4+1)^{1/2}\ (M^3(1/4 + 1/8))}{M^4(1/16 - 2/8 + 1/16)}$$

$$|A^\mu| = |A^r| = -\frac{(6)^{1/2}\ (M^3(3/8))}{M^4(-1/8)} = +\ \frac{3.(6)^{1/2}}{M}$$

Ce cas est compatible avec le fait qu'on est dans la zone critique, car :

$$g_{\varphi\varphi} = -(a^2 + 2Ma^2/r + r^2) = -(1/4 - 1 + 1/4) = +\tfrac{1}{2}M^2 \text{ est positif}$$

Décrivons une boucle temporelle

On obtient le résultat de l'accélération en dimension $|A^{\mu}| = [M]^{-1}$
Pour avoir une accélération exprimé en m/sec^2 soit $[L][T]^{-2}$
Il faut multiplier par $G^{-1}.c^4$, en effet :

$$[G]^{-1} = [L]^{-3}[M]^{+1}[T]^{+2} \text{ et } c = [L][T]^{-1} \text{ soit } c^4 = [L]^4[T]^{-4}$$
$$|A^{\mu}| = [M]^{-1}\,[G^{-1}.][c^4] = [M]^{-1}\,[L]^{-3}[M]^{+1}[T]^{+2}[L]^4[T]^{-4} = [L][T]^{-2}$$

Appliquons avec $M_{soleil} = 2.10^{30}$ kg, $c = 3.\,10^8$ m, $G = 6.67.10^{-11} N.m^2/kg^2$ et $M = 10^7\, M_{soleil}$.

L'équation aux dimensions appliquée à (33) donne :

$$|A^{\mu}| = |A^{r}| = (3.\,6^{1/2}/M).c^4/G = +\,4.46\,.10^7\ m/sec^2 \qquad (12\text{-}9\text{-}1)$$

La seule composante de $|A^{\mu}|$ étant $|A^{r}|$ le signe « + » indique qu'elle est dirigée vers les « r » croissants donc r étant négatif, on est attiré par la singularité. C'est la rotation qui est à la source de cette attraction à courte portée (loi en $(r^2+a^2)^{-2}$), voir chapitre 6.

Décrivons une boucle temporelle

B) **Calcul pour a =M (trou noir critique) et r = - M/2** [64]

$g_{\varphi\varphi} = -(a^2 + 2Ma^2/r + r^2) = -(1 - 4 + 1/4) = +11/4\, M^2$ est positif

$$|A^\mu| = |A^r| = \frac{-(1 - 2M/r + a^2/r^2)^{1/2}(Ma^2 - r^3))}{(a^2r^2 + 2Ma^2r + r^4)} = \frac{-(1+4+4)^{1/2}(M^3(1 + 1/8))}{M^4(1/4 - 1 + 1/16)} = \frac{-3\,(M^3(18/16))}{M^4(-11/16)} = \frac{+54}{11.M}$$

L'équation aux dimensions appliquée à (16) donne :

$$|A^\mu| = |A^r| = (54/11)M.c^4/G = +2.98\,.10^7\ m/sec^2 \qquad (12\text{-}9\text{-}2)$$

La seule composante de $|A^\mu|$ étant $|A^r|$ le signe « + » indique qu'elle est dirigée vers les « r » croissants donc r étant négatif, on est attiré par la singularité, comme au cas précédent.

10- Temps propre par révolution sur une boucle temporelle

Pendant qu'on y est on peut aussi calculer le temps propre mis pour effectuer une révolution.

De $$\boxed{ds = d\lambda\sqrt{g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu}.}$$ (12-10-1)

Comme on peut écrire $d\lambda = d\varphi/(d\varphi/d\lambda) = d\varphi/\varphi'$, et que $\varphi' = -1$, on tire:

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta s &= \int_0^{-2\pi}\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}\,\frac{d\varphi}{\dot{\varphi}}\\ &= 2\pi\sqrt{g_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b},\end{aligned}}$$ (12-10-2)

$$\Delta s = 2\pi\,(g_{\mu\nu}x'^{\mu}x'^{\nu})^{1/2} = 2\pi(g_{\varphi\varphi}.(-1)(-1))^{1/2} = 2\pi\,(g_{\varphi\varphi})^{1/2} = 2\pi\,(-a^2 - 2Ma^2/r - r^2))^{1/2}$$ (12-10-3)

La dernière équation utilise la valeur de $g_{\varphi\varphi}$ calculée précédemment. En termes de dimensions (12-10-3) donne : $[T] = [M]$.

L'équation aux dimensions conduit à multiplier par :

$(G).(c^{-3})$ soit $([M]^{-1}[L]^3[T]^{-2})([L]^{-3}[T]^3)$

Vérifions: $[T] = [M]\ (G).(c^{-3}) = [M]\ ([M]^{-1}[L]^3[T]^{-2})([L]^{-3}[T]^3) = [T]$

Comme $ds = c.d\tau$, en appliquant tout cela, on trouve respectivement pour les applications numériques pour un TN de 10^7 masses solaires :

A) Pour $r = M/2$, $a = M/2$ on a $t_A = 2\pi\,(-(1/4 - 1 + 1/4))^{1/2} = 2\pi(1/2)^{1/2}.M$ soit:

$t_A = 2\pi(1/2)^{1/2}.M\ (G).(c^{-3})$, avec $M = 10^7$ masses solaires : $t_A = 220$ *secondes.*

B) En suivant le même calcul pour $a = M$ et $r = M/2$ on obtient: $t_B = 515$ *secondes*

11-Energie consommée par révolution

Calculons le produit de l'accélération par le temps, c'est-à-dire, le temps pendant lequel on va produire l'accélération, quantité qui va définir la quantité de carburant à éjecter par révolution.

$$A)\ 220x\ 4{,}46\ x\ 10^{7} = 9.81\ x\ 10^{9}$$

$$B)\ 515x\ 2.98x\ 10^{7} = 1{,}5\ x\ 10^{10} \qquad (12\text{-}11\text{-}1)$$

11-1 Solution extrême

Soyons moderne, supposons qu'on ait un dispositif fonctionnant par réaction, capable d'éjecter le gaz à la vitesse « *c* » (difficile de faire mieux).

Remarquons que dans ce cas, l'utilisation de l'équation de Tsiolkovsky (non relativiste), est certainement sujette à caution, encore que si on éjecte du rayonnement pur (lumière) la loi sur les impulsions devrait s'appliquer, mais je n'ai pas creusé ce point et pour ce qu'on veut montrer, cela devrait être un indicateur, à défaut d'autre chose …Si on veut qu'au bout d'une révolution il reste *100* Tonnes (poids de l'ISS), à partir de l'équation de Tsiolkovsky avec $v_e = c$, on a pour B) :

$$10^{5} = m_0 \exp(-.1{,}5.10^{10}/3.10^{8}) = m_0 \exp(-50), \quad \rightarrow \quad m_0 = 0{,}5x\ 10^{27}\ kg\ ^{65} \qquad (12\text{-}11\text{-}1\text{-}1)$$

Si on considère le moteur capable de faire cela, il va faire appel à la désintégration totale de matière en énergie ($e = mc^2$) cela fait $4{,}5\ x\ 10^{43}$ joules, environ 10^{41} Watts pendant la révolution. A titre de comparaison, le soleil c'est $3{,}9\ .10^{26}\ W$, et une supernova de l'ordre de 10^{51} joules (en rayonnement, plus si on compte les neutrinos).

Ces chiffres interpellent doublement : Ils sont énormes, mais il sont finis.

On sait que l'énergie est la grandeur associée au temps en Relativité, et on voit que pour gagner du temps il faut dépenser de l'énergie. La question qui se pose est : L'énergie nécessaire à une particule pour parcourir une boucle temporelle n'est elle pas égale à son énergie propre. Ce qui permettrait

Décrivons une boucle temporelle

11-2 Solution réaliste

Maintenant si on considère une vitesse réaliste d'éjection des gaz (*3 km/s*) on voit que l'équation de Tsiolkovsky donne alors une masse de l'engin au départ de la révolution:

$$10^5 = m_0 \exp(-1{,}5.10^{10}/3.10^3) = m_0 \exp(-0{,}5.10^7) \text{ soit } m_0 = 10^5 \exp(5.10^6)$$

Pour évaluer cela, passons en Logarithmes décimaux.

$$Log(m_0) = 5 + Log\, e.5.10^6 \approx 2171275 \; (Log\, e \approx 0{,}434250) \rightarrow m_0 = 10^{2171275} \; kg \quad (12\text{-}11\text{-}1\text{-}2)$$

L'univers peut être estimé à 10 milliards de galaxies de chacune 10 milliards de masses solaires soit environ 10^{50} *kg*, négligeable par rapport à m_0, quant au trou noir on n'en parle même pas. Le moins qu'on puisse dire, c'est qu'il y a un **problème**. Nous y reviendrons.[66]

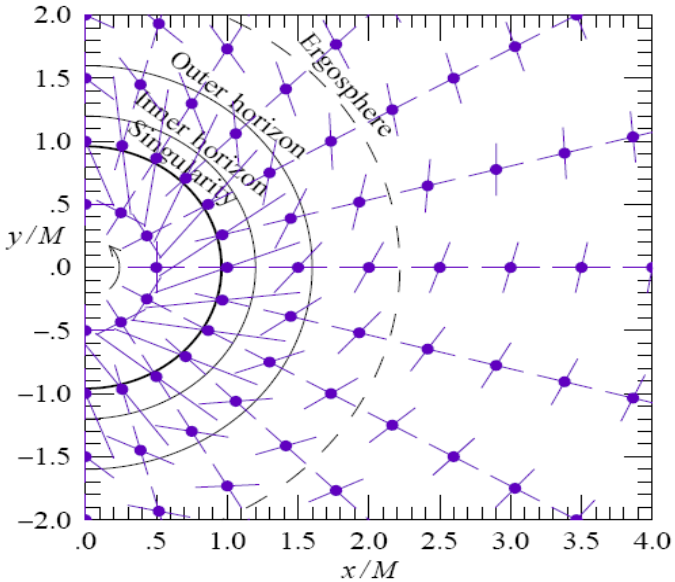
Réalité physique de ces boucles

- On peut douter de la réalité physique de ces boucles temporelles en objectant:
- La région de type III n'est pas physique.
- On ne respecte pas l'hypothèse de corps de test ne perturbant pas le champ.
- Les coordonnées n'ont pas de sens physique : Il y a bien des boucles, mais elles n'ont pas de caractère physique, car la causalité s'apprécie entre observateurs associés aux évènements.
- Holonomie d'un boucle.

La solution de C.Doran (2000)

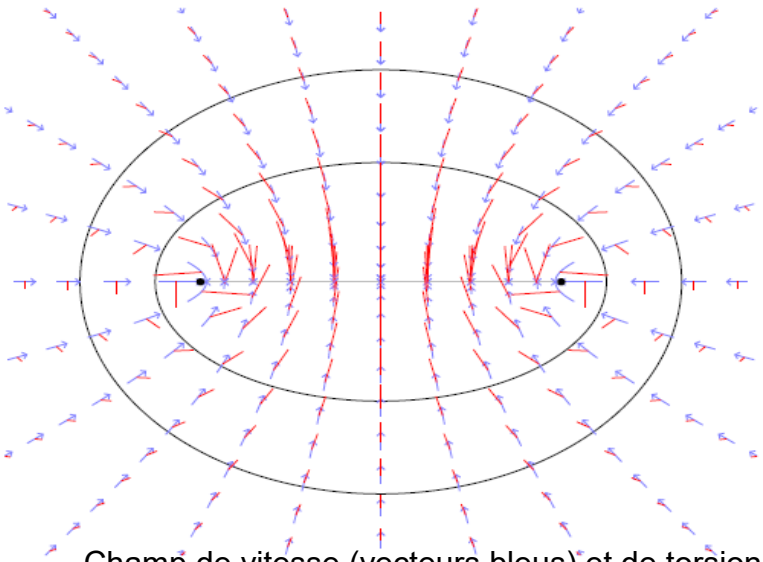
- Doran propose une forme qui est l'équivalent pour le problème de Kerr de la forme de Painlevé pour le problème de Schwarzschild. La coordonnée temps t_{ff} est le temps propre d'un observateur en chute libre radiale et la coordonnée radiale Φ_{ff} correspond à la rotation associée de cet observateur (cordonnées inertielles).
- La métrique prend alors une forme plus simple (pseudo minkowsienne) en particulier en coordonnées « cartésiennes ».
- Cette forme est utilisée dans le « modèle de la rivière » par A. Hamilton et J.Lisle (2006). Ce modèle décrit l'espace temps comme une rivière s'écoulant dans un espace de fond newtonien, les particules de test se mouvant dans et par rapport à cette rivière conformément aux lois de la RR (dans la tétrade co-mobile)
- Cette rivière est caractérisée par un champ décrit par le gradient ordinaire dans la base tétradique d'un tenseur bi-covariant.

Description du champ de la rivière

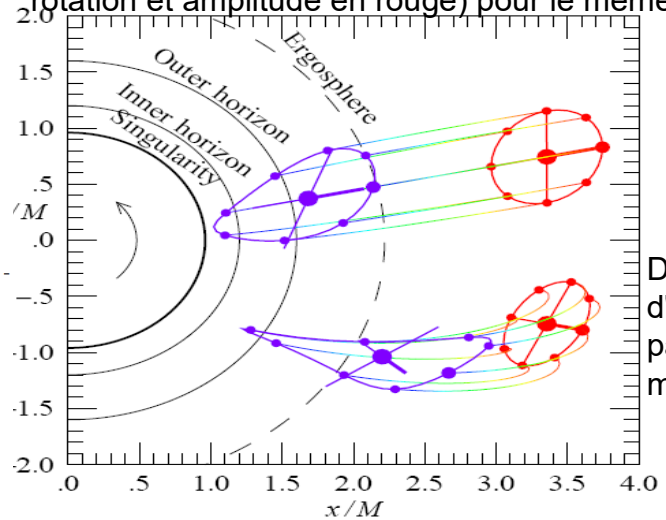


Axes tétradiques axiaux et azimutaux, plan équatorial (x,y), a =0.96, d'un TN de Kerr.. L'inclinaison de l'axe azimutal reflète l'anisotropie de l'espace.Avec t_{ff}-.t_{kerr} =

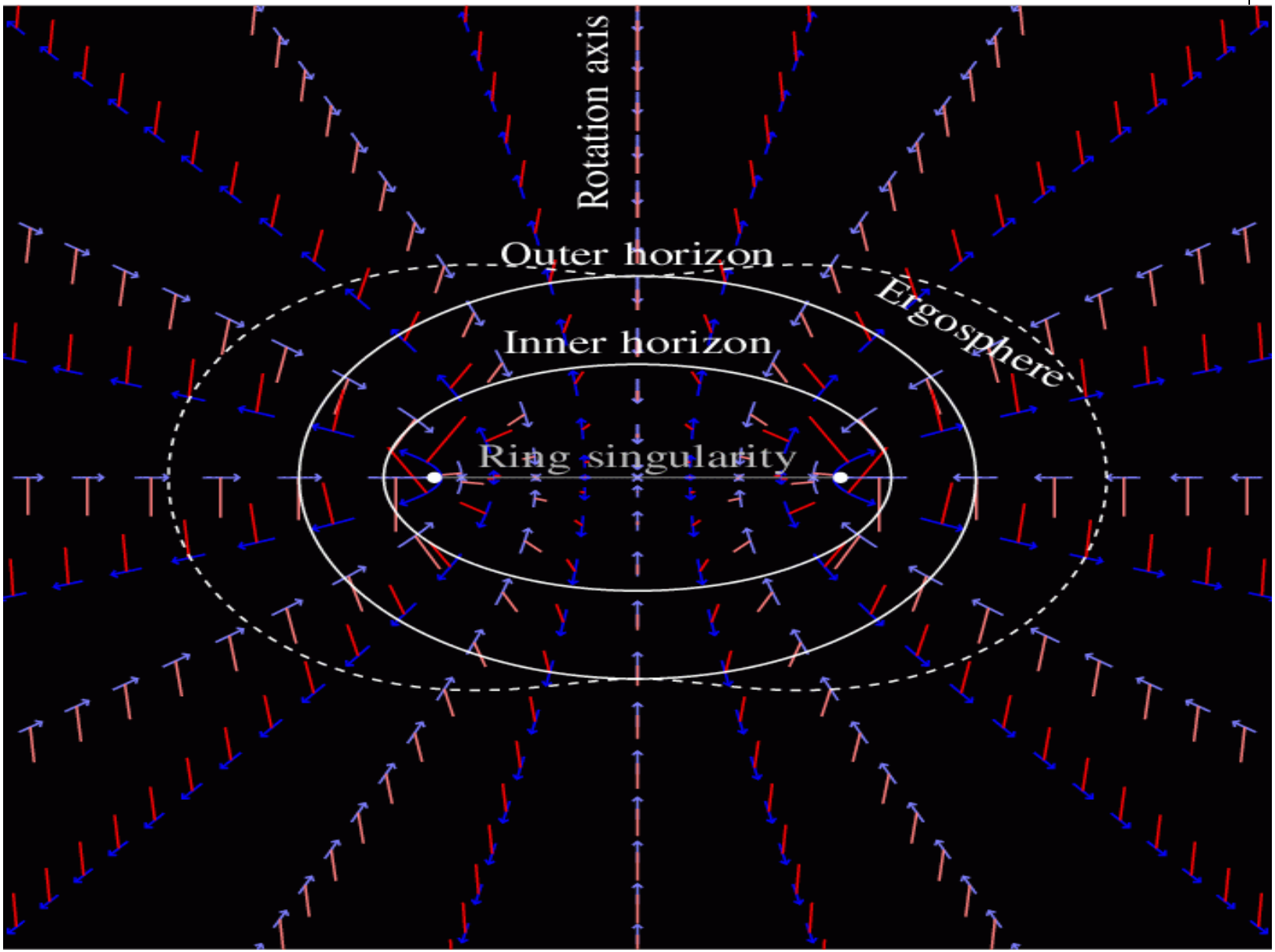
$$\frac{2}{-1+r} - r - \left(\sqrt{2} + \frac{2\sqrt{2}}{-1+r} + \sqrt{2}\, r\right)\sqrt{\frac{r}{1+r^2}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\frac{r}{1+r^2}}\,(1+r^2)\,(1+3r^2)}\left((-1-3r^2)\sqrt{r+r^3}\left(-\frac{6\,i\sqrt{i\,r}\,(-i+r)\sqrt{-i\,(i+r)}\,\mathrm{EllipticE}\left[\mathrm{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i\,(i+r)}}{\sqrt{2}}\right],2\right]}{\sqrt{i\,(-i+r)}\sqrt{r+r^3}} - \frac{6\sqrt{i\,r}\sqrt{i\,(-i+r)}\,(i+r)\,\mathrm{EllipticF}\left[\mathrm{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i\,(i+r)}}{\sqrt{2}}\right],2\right]}{\sqrt{-i\,(i+r)}\sqrt{r+r^3}} + \frac{(4+4i)\sqrt{i\,r}\sqrt{(-i+r)\,(i+r)}\,\mathrm{EllipticPi}\left[1+i,\mathrm{ArcSin}\left[\frac{\sqrt{-i\,(i+r)}}{\sqrt{2}}\right],2\right]}{\sqrt{r+r^3}}\right)\right) - 2\,\mathrm{Log}[-1+r]$$



Champ de vitesse (vecteurs bleus) et de torsion (axe de rotation et amplitude en rouge) pour le même TN de Kerr



Distorsion géodésique d'un ensemble de particules pour le même TN de Kerr


Rotation axis
Outer horizon
Ergosphere
Inner horizon
Ring singularity

Conclusion

- Un objet très simple (3 paramètres) →une géométrie qui donne naissance à une phénoménologie très diversifiée, d'où émergent bon nombre de modèles rencontrés en physique: paramètres fondamentaux?
- Modèle électron/positron, masse gravitationnelle positron négative = renversement du temps: Modèle de Wheeler (un positron est un électron qui remonte le cours du temps)?
- Problème de la machine temporelle encore mal expliqué physiquement: Pb coordonnée temps!
- Caractère stationnaire de la solution, pas simple à représenter. Solution plus explicite par utilisation de coordonnées inertielles.
- La causalité est de nature conforme.

Références -1

- **Bardeen J.M**.(1972) Timelike and null geodesics in the Kerr metric Astrophysical Journal
- **Carroll S. M**. (2004). « Space time and Geometry ». Addinson Wesley
- **Carter B**. (1973) . Properties of the Kerr metric in Dewitt and Dewitt .
- **Carter.B**. (1970). An axisymetric Black Hole has only two degrees of freedom. Phys. Rv. Letters 26,331-333
- **Carter.B** (1968) Global Structure of the Kerr family of gravitational Field (Phys. Rev.Vol 174, number 5, oct 1968).
- **Carter.B.** (1997). Has the black hole equilibrium problem been solved? arXiv:gr-qc/9712038 v1 8dec 1997.
- **De Felice** F.(1980) Angular momentum and separation constant in Kerr metric (J.Phys.A:Math.Gen 13 , 1701-1708)
- **Damour,T. & Deser.S** (1990) Relativité, Vol 19, 739- 748.Encyclopédie Universalis.
- **Doran C**.(2000) A new form of the Kerr solution, Phys.rev D61,067503-067506
- **Droste .J**. (1916) « Het van eenenkel centrumin Einstein's theorie des zwaartekracht en de beweging van een stoffelijk punkt in dat veld. Versl. Gewone Vergad Akad.Amst.25,163-180. English translation : the field of a single centre in Einstein's theory of gravitation and the motion of a particle in that field. Proc.Acad. Sci. Amst.,19(i):197-215.
- **Earman J. & Eisenstaedt J**.(1999). Einstein and Singularities. Stud.Hist.Mod.Phys. Vol 30.N°2 pp185-235. Elsevier Science Ltd GB
- **Einstein A.** (1916). "Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie." Annalen der Physik 49: 769-822.
- **Eisenstaedt** J. (1982). « Histoire et singularités de la solution de Schwarzschild ». Archive for history of exact sciences, Vol 27, Number 2, 157-198
- **Eisenstaedt J**. (1987). Trajectoires et impasses de la solution de Schwarzschild. Archives for History of Exact Sciences. Vol 37, Number 4, p 275-357 (Lettre de Synge à Robertson datée du 31/10/1938 citée p 329).
- **Eisenstaedt J.(1993)** "Lemaître and the Schwarzschild Solution." In *New Studies in the History of General Relativity. Proceedings of the Third International Conference on the History and Philosophy of General Relativity.* Einstein Studies, Vol. 5, John Earman, Michel Janssen, and John D. Norton, eds. Boston: Birkhäuser.

Références -2

- **Hamilton A & Lisle P (2006)** The river model of black holes. arXiv:gr-qc/0411060 v2 31 Aug 2006
- **Kerr R. (1963)** Gravitational Field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. Physical review letters 1 September 1963
- **Landau L. & Lifchitz E. (1994). Théorie des champs, Ed. Mir –Ellipse**
- **Lemaître G.** (1932) « L'univers en expansion » Publications du laboratoire d'astronomie et de géodésie de l'université de Louvain. Vol IX (N°85 et 86) p. 171-205.
- **Misner C.W. & Thorne K. & Wheeler J.A.(**1973) Gravitation. Freeman New York
- **Painlevé P.** (1921) La mécanique classique de la théorie de la relativité. C.R Acad. Sci. Paris 173, 677-680, A.
- **Penrose R.** (1972a). Techniques of differential Topology in Relativity. Soc.of Ind. and Applied Math. Regional
- **Petrov A. Z.(1954).** Classification of space defining gravitationanl fields. Sci. Not. Kazan State Univ.114. 55
- **Pirani F.A.E (1957).** Invariant formulation of gravitational radiation theory. Phys. Rev. 105: 1085
- **B.O'Neil,** Kerr space time,(AK Peters)
- **Rumanio. N** http://nrumiano.free.fr/Fetoiles/int_noir2.html
- **Schwarzschild. K.** (1916a) « Uber das Gravitationsfeld eines Masspunktes nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 189-196.
- **Schwarzschild. K.** (1916b) « Uber das Gravitationsfeld einer kügel aus inkompressibler Flussigkeit nach der Einsteinchen Theorie ». Sitzber.Deut. Akad. Wiss. Berlin, Kl. Math. Phys.. Tech. 424-434.
- **Synge J.L**. (1950). « The gravitationnal field of a particle ». Proc. R. Irish Acad. A 53, 83-114
- **Thorne K.** (1994). Trous noirs et distorsions du temps. Champs Flammarion (1997-trad.F.)