

• <http://pancake.uchicago.edu/~carroll/notes/>: J. Fric endosse toute responsabilité pour les erreurs que sa traduction (qui n'a pas été vérifiée par l'auteur) aurait pu ajouter. En cas de doute, veuillez vous rapporter à la version originale.

COSMOLOGIE : Le modèle Standard	4
Quelle métrique pour décrire l'univers ?	4
Considérations générales sur le type de métrique convenable à priori	4
Hypothèse sur le contenu de l'univers	4
Principe Cosmologique	4
Conséquences de l'homogénéité et de l'isotropie : métrique générique	5
Type de métrique générale associée	5
Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique	6
Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D	6
Solution : la métrique de Robertson Walker (RW)	7
Cas plat, $k = 0$	8
Cas fermé $k = + 1$	8
Cas ouvert $k = - 1$	9
l'équation d'EINSTEIN avec la métrique RW	9
Calcul des paramètres géométriques (membre de gauche).	9
Calcul des symboles de Christoffel pour la métrique RW	9
Calcul du tenseur de RICCI pour la métrique RW	10
Calcul scalaire de RICCI pour la métrique RW	10
Le tenseur energie-impulsion (membre de droite)	10
Equation d'état	11
Relation entre la densité de matière et la pression	11
On donc $\rho \cdot a^4 = \text{constante}$ dans ce cas	12
Fluides galactiques	12
Fluide de type "matière"	12
Fluide de type "rayonnement"	13

Fluide de type " énergie du vide"	13
Résolution de l'équation d'Einstein	14
Equation de Friedmann	15
Terminologie :	15
Constante de Hubble	15
Facteur d'échelle	15
Paramètre de décélération	16
Paramètre de densité	16
Etude qualitative de l'équation de Friedmann	17
Rappels généraux	17
Cas $\Lambda = 0$,	17
Singularité initiale : le big bang	18
Évolution de l'univers	18
Si $k \leq 0$, (univers plats et ouverts) : expansion éternelle	18
Vitesse d'expansion	18
Si $k = 1$, univers fermés : expansion jusqu'à un maximum puis contraction	19
Synthèse de l'évolution de l'Univers	20
Solutions exactes de l'équation de Friedmann	20
Univers de FLRW dominés par la matière	20
Univers ouverts	20
Univers plats	20
Univers fermés	20
Univers dominés par le rayonnement	21
Univers ouverts	21
Univers plats	21
Univers fermés	21
Univers dominés par le vide	21

Les paramètres cosmologiques	22
Rappel des méthodes classiques et des résultats	22
Estimation directe de ρ	22
l'âge de l'Univers	23
Nucléosynthèse primordiale	23
La valeur de la constante de Hubble mesurée	24
l'observation directe révèle un Univers beaucoup trop léger	24
À la recherche de la matière invisible	24
Il y a donc de la matière indétectable par son rayonnement	24
La masse manquante détectée	24
Discussion sur les méthodes d'évaluation des paramètres cosmologiques	24
Le paramètre de décélération q	25
Méthode de mesure	25
Décalage vers le rouge	26
Rapport des facteurs d'échelle	26
Distance de luminosité	27
Méthode de calcul de H_0 et q à partir de la distance de luminosité et du Décalage vers le rouge z	27

COSMOLOGIE : Le modèle Standard

Résumé :

Nous allons commencer par établir, à partir d'hypothèses à priori, sur la structure de l'univers, le type de métrique à lui appliquer et aboutir à la métrique de Robertson-Walker (RW). De cette métrique nous allons déduire à priori les classes possibles d'univers (courbure, fermés /ouverts). Nous allons établir le membre de gauche de l'équation d'Einstein sur la base de cette métrique. Le tenseur Impulsion énergie (membre de droite), résulte d'une modélisation des fluides galactiques dont nous allons détailler les modalités et caractéristiques (en utilisant une équation d'état que nous poserons). En résolvant l'équation d'Einstein nous établirons l'équation de Friedmann dont nous ferons une discussion qualitative avant d'en donner quelques solutions exactes. Nous terminerons par une discussion sur les paramètres cosmologiques qui déterminent le destin de l'univers et les méthodes de mesure.

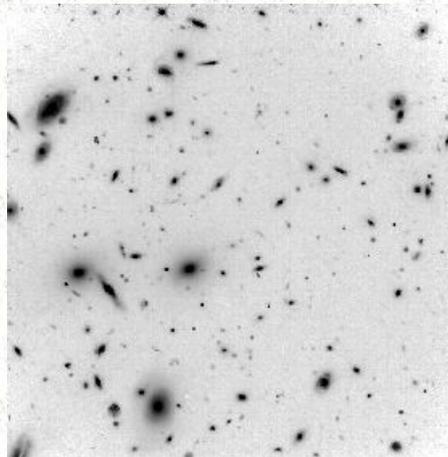
Quelle métrique pour décrire l'univers ?

Considérations générales sur le type de métrique convenable à priori

Hypothèse sur le contenu de l'univers

Principe Cosmologique

l'univers est homogène (identique à lui-même partout) et isotrope (identique à lui-même dans toutes les directions)



Malgré les inhomogénéités locales, à grande échelle, l'Univers paraît satisfaire à ce principe qui est corroboré par le comptage des galaxies, les rayonnements X diffus, le rayonnement de fond γ et le Rayonnement de Fond Cosmologique (RFC) à environ $2,7 \text{ }^\circ\text{K}$.

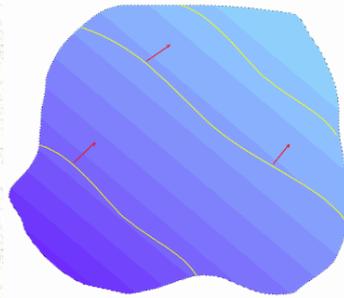
Par ailleurs le fait qu'il n'y ait pas de point privilégié dans l'Univers, ni centre, ni bords est une hypothèse plutôt élégante sur le plan intellectuel.

Par contre, l'observation des galaxies lointaines nous indique que l'univers n'est pas statique et change avec le temps donc non homogène en temps (passé \neq du futur).

Conséquences de l'homogénéité et de l'isotropie

Type de métrique générale associée

En Relativité Générale, cela conduit une foliation (découpe en tranches d'espace homogène et isotrope) de l'univers par le temps, ce qui permet de séparer les variables.



l'Espace temps est alors de type $R.\Sigma$ où R représente la direction du temps et Σ est une variété topologique homogène et isotrope de dimension 3

Ces deux contraintes confèrent à l'espace une symétrie maximum (nombre maximum possible de vecteurs de Killing) en conséquence la métrique est de la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\gamma_{ij}(u)du^i du^j . \quad (1)$$

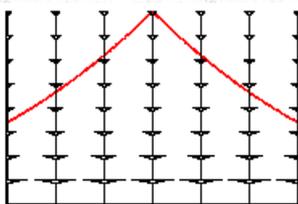
où t coordonnée de temps, u coordonnée d'espace de Σ , γ_{ij} est la métrique à symétrie maximum de Σ .

La fonction $a(t)$ est le facteur d'échelle qui indique la taille à l'instant t .

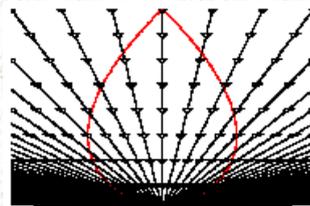
Les coordonnées u sont appelées coordonnées "comobiles"

Un observateur dont les coordonnées " u " ne changent pas est appelé *comobile*.

Seuls les observateurs comobiles vont constater l'isotropie et homogénéité de l'espace.



Coordonnées comobiles



Coordonnées synchrones

Ils vont de surcroît observer l'univers au même âge (temps universel mesuré par la température du RFC par exemple) comme conséquence de la structure de l'Univers.

Sur Terre, ce n'est pas le cas on observe une anisotropie du RFC dans le sens du mouvement global de la Terre (qu'on sait corriger).

Type de Métrique associé au sous espace 3D symétrique

Si on s'intéresse aux métriques 3D à symétrie maximum γ_{ij} , elles obéissent à la loi

$${}^{(3)}R_{ijkl} = k(\gamma_{ik}\gamma_{jl} - \gamma_{il}\gamma_{jk}), \quad (2)$$

ou k est une constante et l'indice ${}^{(3)}$ sur le tenseur de Riemann nous rappelle que C est une métrique 3D, γ_{ij} n'est donc pas la métrique de l'espace temps.

Tenseur de Ricci associé au sous espace 3D

Le tenseur de Ricci dont la forme générale est $R_{\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\alpha}^\alpha - \partial_\nu \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha + \Gamma_{\mu\beta}^\alpha \Gamma_{\nu\alpha}^\beta - \Gamma_{\nu\beta}^\alpha \Gamma_{\mu\alpha}^\beta$ peut s'exprimer plus simplement compte tenu du haut degré de symétrie de l'espace.

Ses composantes d'espace s'écrivent dans ce cas :

$${}^{(3)}R_{jt} = 2k\gamma_{jt}. \quad (3)$$

Si l'espace est à symétrie maximale il possède nécessairement une symétrie sphérique.

Elle est de forme :

$$d\sigma^2 = \gamma_{ij} du^i du^j = e^{2\beta(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (4)$$

Les composantes du tenseur de Ricci associé sont :

$$\begin{aligned} {}^{(3)}R_{11} &= \frac{2}{r} \partial_1 \beta \\ {}^{(3)}R_{22} &= e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1 \\ {}^{(3)}R_{33} &= [e^{-2\beta} (r \partial_1 \beta - 1) + 1] \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (5)$$

On les pose proportionnelles à la métrique en utilisant (3) et on résout pour $\beta(r)$:

$$\beta = -\frac{1}{2} \ln(1 - kr^2). \quad (6)$$

Solution: La métrique de Robertson Walker (RW)

Ceci donne la métrique suivante (en coordonnées « sphériques ») pour l'espace temps :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \right]. \quad (7)$$

C'est la métrique de Robertson-Walker que nous avons déterminée sans l'équation d'Einstein. Cette métrique définit complètement la courbure en fonction de $a(t)$ et k , seuls paramètres que l'équation d'Einstein va déterminer en fonction du tenseur énergie impulsion $T_{\mu\nu}$.

où " $a(t)$ " appelé facteur d'échelle est un paramètre "sans dimension" valorisé à 1 en général au temps de référence (« maintenant ») et k est un paramètre de courbure de dimension égale à l'inverse du carré d'une longueur.

L'espace étant homogène, il n'y a pas d'origine privilégiée pour la coordonnée « r », qui est la coordonnée radiale « comobile » et traduit la « distance comobile » entre deux points, la distance géométrique valant $a(t)r$.

Les autres coordonnées sphériques angulaires θ et ϕ sont classiques.

La démarche paraît laborieuse pour arriver à cette métrique que l'on peut présupposer intuitivement, mais C'est la méthode rigoureuse enseignée aujourd'hui

Nous n'avons pas encore utilisé l'équation d'Einstein qui va déterminer le comportement de $a(t)$.

Notons que les substitutions :

$$\begin{aligned} k &\rightarrow \frac{k}{|k|} \\ r &\rightarrow \sqrt{|k|} r \\ a &\rightarrow \frac{a}{\sqrt{|k|}} \end{aligned} \quad (8)$$

laissent (7) invariant.

Donc le seul paramètre pertinent est $k/|k|$, et il y a 3 cas intéressants:

$$k = -1, k = 0, \text{ et } k = +1.$$

Le cas $k = -1$ correspond à une courbure constante négative sur Σ , et est appelé ouvert;

Le cas $k = 0$ correspond à une courbure nulle sur Σ , et est appelé plat.

Le cas $k = +1$ correspond à une courbure positive sur Σ , et est appelé fermé.

Types d'univers associés à la métrique RW

Examinons chacune de ces possibilités.

Cas plat, $k = 0$

La métrique sur Σ est :

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= dr^2 + r^2 d\Omega^2 \\ &= dx^2 + dy^2 + dz^2, \end{aligned} \quad (9)$$

Elle caractérise un Espace Euclidien. Globalement, il peut décrire \mathbb{R}^3 ou une Variété topologique plus complexe comme un Hyper-Tore $S^1 \times S^1 \times S^1$ par exemple.

Cas fermé $k = +1$

On définit $r = \sin\chi$ pour écrire la métrique sur Σ comme suit :

$$d\sigma^2 = d\chi^2 + \sin^2 \chi d\Omega^2, \quad (10)$$

Qui est la métrique d'une hypersphère. C'est la seule possibilité pour la structure globale, exception faite de la Variété topologique non orientable $\mathbb{R}P^3$).

Cas ouvert $k = -1$

On pose $r = \sinh\psi$ et on obtient :

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sinh^2 \psi d\Omega^2. \quad (11)$$

C'est la métrique d'un espace 3D à courbure négative constante, difficile à visualiser (penser à la selle de cheval en 2D).

Globalement un tel espace peut s'étendre indéfiniment, d'où le qualificatif d'ouvert,, mais il peut aussi décrire un espace compact non simplement connexe, ce qui fait que le terme "ouvert" est impropre.

L'équation d'Einstein avec la métrique RW

Calcul des paramètres géométriques (membre de gauche)

Maintenant que nous disposons de la métrique on peut calculer les symboles de Christoffel et le tenseur de courbure

Calcul des symboles de Christoffel pour la métrique RW

La forme générale est $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} (\partial g_{il} / \partial x^j + \partial g_{jl} / \partial x^i - \partial g_{ij} / \partial x^l)$

Avec $\dot{a} \equiv da/dt$, les symboles de Christoffel sont donnés par

Rappelons que compte tenu du haut degré de symétrie de cette métrique, beaucoup de symboles de Christoffel sont nuls. Par exemple $\Gamma_{ij}^k = 0$ si $i \neq j \neq k$, $\Gamma_{i0}^0 = \Gamma_{0j}^0 = 0$, $\Gamma_{22}^2 = \Gamma_{33}^3 = 0$, etc. Il reste :

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^0 &= \frac{a\ddot{a}}{1-kr^2} & \Gamma_{22}^0 &= a\dot{a}r^2 & \Gamma_{33}^0 &= a\dot{a}r^2 \sin^2 \theta \\ \Gamma_{01}^1 &= \Gamma_{10}^1 = \Gamma_{02}^2 = \Gamma_{20}^2 = \Gamma_{03}^3 = \Gamma_{30}^3 = \frac{\dot{a}}{a} \\ \Gamma_{22}^1 &= -r(1-kr^2) & \Gamma_{33}^1 &= -r(1-kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{13}^3 = \Gamma_{31}^3 = \frac{1}{r} \\ \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta & \Gamma_{23}^3 &= \Gamma_{32}^3 = \cot \theta .\end{aligned}\tag{12}$$

Calcul du tenseur de RICCI pour la métrique RW

Les composantes non nulles du tenseur de Ricci valent :

$$\begin{aligned}R_{00} &= -3\frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{11} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k}{1-kr^2} \\ R_{22} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \\ R_{33} &= r^2(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2k) \sin^2 \theta ,\end{aligned}\tag{13}$$

Calcul scalaire de RICCI pour la métrique RW

Le scalaire de Ricci ($R = G^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$) vaut :

$$R = \frac{6}{a^2} (a\ddot{a} + \dot{a}^2 + k) .\tag{14}$$

Le Tenseur énergie-impulsion (membre de droite)

Considérons le tenseur énergie-impulsion. On rappelle que dans l'hypothèse d'un fluide parfait isotrope dans son référentiel repos, il vaut :

$$T_{\mu\nu} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + pg_{\mu\nu} , \quad (15)$$

où ρ et p sont respectivement la densité d'énergie et la pression mesurées dans le référentiel repos et U^μ est la quadrivitesse du fluide. Il est clair qu'à un fluide isotrope dans un référentiel on peut faire correspondre une métrique isotrope dans un référentiel. Faisons coïncider ces deux référentiels. Le fluide sera alors au repos en coordonnées comobiles.

La quadrivitesse est alors :

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0) , \quad (16)$$

Et le tenseur énergie-impulsion vaut :

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & g_{ij}p & \\ 0 & & & \end{pmatrix} . \quad (17)$$

En élevant un indice, il prend une forme plus utilisable :

$$T^\mu{}_\nu = \text{diag}(-\rho, p, p, p) . \quad (18)$$

Notons que la trace est donnée par :

$$T = T^\mu{}_\mu = -\rho + 3p . \quad (19)$$

Avant de le reporter dans l'équation d'Einstein, il est instructif de considérer la composante zéro de l'équation de conservation de l'énergie :

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\mu T^\mu{}_0 \\ &= \partial_\mu T^\mu{}_0 + \Gamma^\mu_{\mu 0} T^0{}_0 - \Gamma^\lambda_{\mu 0} T^\mu{}_\lambda \\ &= -\partial_0 \rho - 3 \frac{\dot{a}}{a} (\rho + p) . \end{aligned} \quad (20)$$

Équation d'état

Relation entre la densité de matière et la pression

Pour avancer il nous faut choisir une équation d'état, relation entre ρ et p . Tous les fluides parfaits, applicables en Cosmologie, conduisent à l'équation d'état :

$$p = w\rho , \quad (21)$$

où w est une constante indépendante du temps. L'équation de conservation de l'énergie devient :

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a} , \quad (22)$$

qui par intégration donne :

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} . \quad (23)$$

C'est cette équation qui détermine l'évolution de la densité liée à la variation du facteur d'échelle, en fonction des proportions relatives de matière et de rayonnement.

Si l'univers est composé de matière seulement ($w = 0$), la variation est évidemment en a^{-3} .

On a donc $\rho \cdot a^3 = \text{constante}$ dans ce cas.

Si $w=1/3$ (rayonnement seulement), alors la variation est en a^{-4} , les photons subissent une variation d'énergie (donc de masse) supplémentaire linéaire en a^{-1} , du fait du décalage de la longueur d'onde.

On donc $\rho \cdot a^4 = \text{constante}$ dans ce cas.

Fluides galactiques

La poussière et le rayonnement sont les deux exemples les plus connus de fluides galactiques.

Fluide de type “matière”

La poussière est de la matière non relativiste sans collision (ni viscosité) qui conduit à $w = 0$.

Les galaxies et les étoiles classiques sont les exemples typiques de “poussière” ou la pression est négligeable devant la densité d’énergie à grande échelle.

On qualifie de matière cette poussière et les Univers dont l’énergie est constituée majoritairement de “poussière” sont dit “dominés par la matière”.

La densité d’énergie décroît naturellement en :

$$\rho \propto a^{-3} . \quad (24)$$

Ceci correspond à la dilution d’une quantité constante de poussières. l’énergie, essentiellement constituée de l’énergie au repos de cette matière, est proportionnelle à la densité.

Fluide de type “rayonnement”

Le rayonnement peut être utilisé pour décrire soit du rayonnement électromagnétique présent soit des particules massives relativistes se comportant alors comme des photons, du moins pour l’équation d’état.

Bien que le rayonnement soit un fluide parfait et ait à ce titre un tenseur énergie-impulsion donné par (15), nous savons que : $T_{\mu\nu}$ peut aussi être exprimé en terme d’intensité de champ par :

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi} (F^{\mu\lambda} F^{\nu}_{\lambda} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma}) . \quad (25)$$

Dont la trace vaut :

$$T^{\mu}_{\mu} = \frac{1}{4\pi} \left[F^{\mu\lambda} F_{\mu\lambda} - \frac{1}{4} (4) F^{\lambda\sigma} F_{\lambda\sigma} \right] = 0 . \quad (26)$$

Comme il est aussi égal à (19), l’équation d’état est :

$$p = \frac{1}{3} \rho . \quad (27)$$

Un Univers dont la densité d'énergie est majoritairement sous forme de rayonnement est dit "dominé par le rayonnement. Sa densité d'énergie décroît comme :

$$\rho \propto a^{-4} . \quad (28)$$

On voit que la densité d'énergie de rayonnement décroît plus vite que celle de la matière du fait que les photons dilués en a^{-3} comme la matière non relativiste subissent une perte d'énergie supplémentaire en a^{-1} par décalage vers le rouge lorsque l'Univers s'étend. De même les particules relativistes sont ralenties du même facteur en coordonnées comobiles.

Aujourd'hui nous constatons que l'Univers est dominé par la matière

Avec $\rho_{\text{mat}}/\rho_{\text{rad}} \sim 10^6$. Cependant l'Univers primordial était beaucoup plus petit et a été dominé à une époque par le rayonnement.

On peut aussi considérer l'énergie du vide caractérisée par son tenseur énergie-impulsion, ce qui est équivalent à l'introduction d'une constante cosmologique.

Fluide de type "énergie du vide"

L'équation d'Einstein avec une constante cosmologique s'écrit :

$$G_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} , \quad (29)$$

Elle a la même forme que sans constante cosmologique mais avec un tenseur énergie-impulsion supplémentaire pour le vide qui vaut :

$$T_{\mu\nu}^{(\text{vac})} = -\frac{\Lambda}{8\pi G} g_{\mu\nu} . \quad (30)$$

Ceci a la forme d'un fluide parfait avec :

$$\rho = -p = \frac{\Lambda}{8\pi G} . \quad (31)$$

Nous avons donc $w = -1$, avec une densité d'énergie indépendante de "a", conforme à ce qu'on doit escompter d'une énergie du vide.

Comme la densité d'énergie de la matière et du rayonnement décroissent lorsque l'Univers s'étend, à long terme l'énergie du vide même faible mais constante l'emporte sauf si une contraction intervient avant le point "critique".

Si on dépasse ce point critique, on dit que l'Univers est dominé par l'énergie du vide.

Résolution de l'équation d'Einstein

Rappelons qu'elle peut aussi s'écrire :

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right) . \quad (32)$$

L'équation $\mu\nu=00$ (temps) est :

$$-3\frac{\ddot{a}}{a} = 4\pi G(\rho + 3p) , \quad (33)$$

Et les équations $\mu\nu=ij$ (espace) donnent :

$$\frac{\ddot{a}}{a} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + 2\frac{k}{a^2} = 4\pi G(\rho - p) . \quad (34)$$

(Du fait de l'isotropie de l'espace, les $\mu\nu=ij$, produisent la même équation).

Équation de Friedmann

Utilisons (33) pour éliminer les dérivées secondes de (34), et simplifions on obtient :

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p) , \quad (35)$$

et

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} . \quad (36)$$

Cet ensemble de deux équations forme l'équation de Friedmann, associé à la métrique de la forme (7), il définit les Univers de Friedmann-Robertson-Walker (FRW).

Terminologie :

Constante de Hubble

Le taux d'expansion est caractérisé par le paramètre de Hubble :

$$H = \frac{\dot{a}}{a} . \quad (37)$$

Sa valeur aujourd'hui est la constante de Hubble, H_0 .

Sa mesure est délicate (Note JF : ≈ 73 km/sec/Mpc selon WMAP 2011), les estimations (lorsque ce cours a été écrit) variaient de 40 à 90 km/sec/Mpc, ("Mpc" "Mégaparsec", soit 3×10^{24} cm.).

Notons que nous devons diviser \dot{a} par a pour obtenir une quantité mesurable, car l'échelle globale " a " n'est pas accessible directement.

Facteur d'échelle

On voit dans l'expression de la métrique que le facteur $a(t)$ donne l'échelle de la métrique d'espace.

Lorsqu'on détecte un signal électromagnétique (le RFC par exemple) aujourd'hui à t_0 alors que le rayon de l'univers est de a_0 , il a été émis à un temps t_1 alors que le rayon de l'univers était de a_1 .

On appelle a_1/a_0 le facteur d'échelle ($\approx 10^{-3}$ pour le RFC par exemple)

Paramètre de décélération

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}, \quad (38)$$

Il mesure le taux de changement du taux d'expansion, $(\ddot{a}/\dot{a})/(\dot{a}/a)$:

Paramètre de densité

$$\begin{aligned} \Omega &= \frac{8\pi G}{3H^2} \rho \\ &= \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}, \end{aligned} \quad (39)$$

où la densité critique est définie par :

$$\rho_{\text{crit}} = \frac{3H^2}{8\pi G}. \quad (40)$$

Cette quantité (qui change au cours du temps) est dite critique, car l'équation de Friedmann (36) peut être écrite :

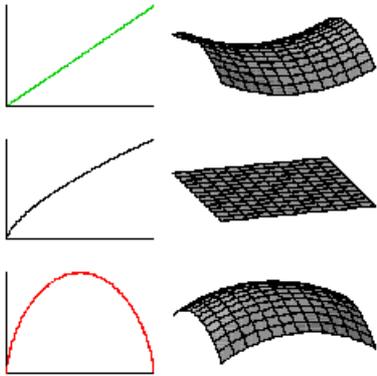
$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2}. \quad (41)$$

Le signe de k est déterminé en fonction de la valeur de Ω par rapport à 1 ($H^2 a^2$ est positif). Nous avons :

$\rho < \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k = -1 \leftrightarrow$ Univers ouvert

$\rho = \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0 \leftrightarrow$ Univers plat (marginale ouvert)

$\rho > \rho_{\text{crit}} \leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k = +1 \leftrightarrow$ Univers fermé



Le paramètre de densité nous indique donc laquelle des trois géométries de Robertson-Walker décrit notre Univers. On comprend l'intérêt que suscite sa détermination précise qui est l'objet d'une intense activité.

Étude qualitative de l'équation de Friedmann

Rappels généraux

On peut résoudre rigoureusement l'équation de Friedmann dans quelques cas simples.

Avant de le faire, il est très utile d'étudier le comportement qualitatif de ses différentes possibilités.

Cas $\Lambda = 0$, et Univers rempli de fluides d'énergie positive. ($\rho > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$) : l'Univers "décélère".

Posons pour le moment $\Lambda = 0$, et considérons le comportement d'Univers remplis de fluides d'énergie positive. ($\rho > 0$) et de pression non négative ($p \geq 0$).

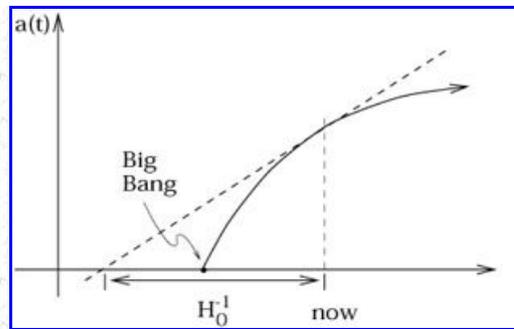
$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p), \quad (35)$$

Alors (35) impose $\ddot{a} < 0$. Comme nous observons l'Univers en ($\dot{a} > 0$), cela implique que l'Univers "décélère".

Cela est logique, car la gravitation (attractive) agit contre l'expansion.

Cela nous indique que son taux d'expansion était beaucoup plus important dans le passé, et si on remonte suffisamment loin on tombe sur une singularité pour $a = 0$.

Notons que si \ddot{a} vaut exactement zéro, $a(t)$ serait linéaire, et l'âge de l'Univers serait H_0^{-1} . Comme \ddot{a} est en fait négatif, l'univers doit être plus jeune que cela.



Singularité initiale : le Big Bang

Cette singularité pour $a = 0$ est le “Big Bang” (cette théorie porte en français le doux nom de “Théorie de la Création Soudaine”).

Le Big Bang représente la création de l’espace¹ “ex nihilo” (singularité). Ce n’est pas une explosion de matière pré existante dans un espace temps pré existant.

La symétrie parfaite de notre univers FRW est-elle responsable de cette singularité ? Non, car le théorème de singularité impose que tout univers avec $\rho > 0$ et $p \geq 0$ doit avoir commencé par une singularité (Penrose).

Comme la densité d’énergie devient arbitrairement élevée quand $a \rightarrow 0$, on ne peut pas espérer que la Relativité Générale “classique” nous fournisse une description de cet état. On espère cela d’une théorie quantique de la gravitation.

Évolution de l’univers

Si $k \leq 0$, (Univers plats et ouverts) : Expansion éternelle

L’évolution de l’univers est différente selon les valeurs de k . Pour le cas ouvert et le cas plat, $k \leq 0$,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2}. \quad (36)$$

L’équation (36) implique :

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 + |k|. \quad (42)$$

Le membre de droite est strictement positif (car $\rho > 0$), donc \dot{a} ne s’annule jamais.

Comme nous observons $\dot{a} > 0$, il doit le rester indéfiniment. De ce fait les univers de types plats et ouverts sont en expansion “éternelle” ouverts temporellement et spatialement.

Rappelons l’hypothèse de densité d’énergie strictement positive. Une densité d’énergie négative ne conduit pas à une expansion sans fin de l’univers même s’il est ouvert.

¹ Note JF : La coordonnée temporelle t n’est pas singulière à $t = 0$.

Vitesse d'expansion

Quelle est la vitesse d'expansion de ces univers

Considérons la quantité ρa^3 (qui est constante dans un univers dominé par la matière). Du fait de l'équation de conservation de l'énergie (20) nous avons :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\rho a^3) &= a^3 \left(\dot{\rho} + 3\rho \frac{\dot{a}}{a} \right) \\ &= -3p a^2 \dot{a} .\end{aligned}\quad (43)$$

Le terme de droite est soit nul soit négatif donc :

$$\frac{d}{dt}(\rho a^3) \leq 0 . \quad (44)$$

Cela implique que ρa^2 doit s'annuler dans un univers en expansion infinie, car $a \rightarrow \infty$. Alors (42) nous indique que :

$$\dot{a}^2 \rightarrow |k| . \quad (45)$$

(Rappelons que ceci est vrai pour $k \leq 0$), donc pour $k = -1$, la vitesse d'expansion tend vers $\dot{a} \rightarrow 1$, alors que pour $k = 0$ l'univers poursuit son expansion de plus en plus lentement.

Si $k = 1$, Univers fermés : Expansion jusqu'à un maximum puis contraction

Pour les univers fermés ($k = +1$),

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} . \quad (36)$$

devient :

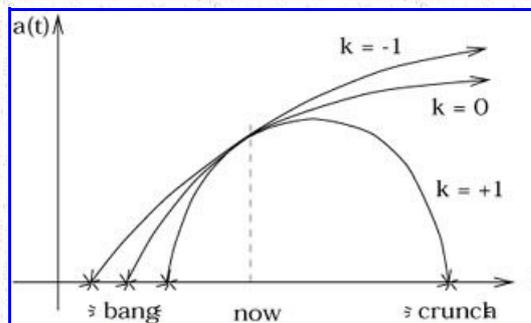
$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho a^2 - 1 . \quad (46)$$

l'argument $\rho a^2 \rightarrow 0$ quand $a \rightarrow \infty$ s'applique toujours; mais dans ce cas (46) devient négatif, ce qui ne peut arriver. Donc l'univers ne s'étend pas indéfiniment, a possède une limite supérieure a_{\max} . Quand a approche a_{\max} , (35) implique :

$$\ddot{a} \rightarrow -\frac{4\pi G}{3}(\rho + 3p)a_{\max} < 0 . \quad (47)$$

Donc \ddot{a} a une valeur finie et négative à ce point, lorsque a atteint a_{\max} il commence à décroître, (et comme $\ddot{a} < 0$) il va inexorablement se contracter vers zéro - le Big Crunch. De ce fait les univers fermés (sous réserve des hypothèses ρ positif et p non négatif) sont fermés en temps et en espace.

Synthèse de l'évolution de l'Univers



Solutions exactes de l'équation de Friedmann

Nous allons maintenant décrire quelques solutions exactes correspondant à un type de densité d'énergie seulement.

Univers de FRW dominés par la matière

Pour les univers dominés par la matière ($p = 0$), on peut utiliser l'angle de développement $\Phi(t)$, plutôt que t comme paramètre direct. Les solutions sont alors:

Univers ouverts

$$\begin{cases} a = \frac{C}{2}(\cosh \phi - 1) \\ t = \frac{C}{2}(\sinh \phi - \phi) \end{cases} \quad (k = -1), \quad (48)$$

Univers plats

$$a = \left(\frac{9C}{4}\right)^{1/3} t^{2/3} \quad (k = 0), \quad (49)$$

Univers fermés

$$\begin{cases} a = \frac{C}{2}(1 - \cos \phi) \\ t = \frac{C}{2}(\phi - \sin \phi) \end{cases} \quad (k = +1), \quad (50)$$

Où on a défini :

$$C = \frac{8\pi G}{3} \rho a^3 = \text{constant}. \quad (51)$$

Univers dominés par le rayonnement

Alors $p = \rho/3$, on a de nouveau des :

Univers ouverts

$$a = \sqrt{C'} \left[\left(1 + \frac{t}{\sqrt{C'}} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \quad (k = -1), \quad (52)$$

Univers plats

$$a = (4C')^{1/4} t^{1/2} \quad (k = 0), \quad (53)$$

Univers fermés

$$a = \sqrt{C'} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\sqrt{C'}} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (k = +1), \quad (54)$$

Où cette fois nous avons défini :

$$C' = \frac{8\pi G}{3} \rho a^4 = \text{constant}. \quad (55)$$

On peut vérifier que ces solutions exactes possèdent bien les propriétés que nous leur avons attribuées a priori.

Univers dominés par le vide

Soit ρ soit p va être négatif, en contradiction avec les hypothèses faites auparavant pour déterminer le comportement général de $a(t)$. Dans ce cas la correspondance entre ouvert / fermé et expansion sans fin et re-contraction ne s'applique plus.

Commençons par $\Lambda < 0$. Dans ce cas Ω est négatif, et de (41), ceci ne peut arriver que si $k = -1$.

La solution est dans ce cas :

$$a = \sqrt{\frac{-3}{\Lambda}} \sin \left(\sqrt{\frac{-\Lambda}{3}} t \right) . \quad (56)$$

Il y a aussi une solution ouverte ($k = -1$) pour $\Lambda > 0$, donné par :

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \sinh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) . \quad (57)$$

Un Univers plat dominé par le vide doit avoir $\Lambda > 0$, et la solution est (Univers de De Sitter) :

$$a \propto \exp \left(\pm \sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) , \quad (58)$$

Tandis qu'un univers fermé doit aussi avoir $\Lambda > 0$, et satisfaire :

$$a = \sqrt{\frac{3}{\Lambda}} \cosh \left(\sqrt{\frac{\Lambda}{3}} t \right) . \quad (59)$$

Ces solutions sont d'apparence trompeuse.

En fait ces trois solutions pour $\Lambda > 0$, données par (57), (58), et (59), représentent toutes le même espace-temps mais dans des systèmes de coordonnées différents.

Cet espace temps appelé espace-temps de De Sitter, présente le degré de symétrie maximum (Voir Hawking et Ellis pour les détails).

La solution $\Lambda < 0$ (56) est aussi à symétrie maximum et est appelée espace temps anti-de Sitter.

Les paramètres Cosmologiques

Rappel des méthodes classiques et des résultats

La détermination de ρ et de H_0 dont dépend Ω sont essentiels pour le devenir de l'Univers.

Estimation directe de ρ

La densité cosmique ρ a d'abord été estimée par observation " directe" et comptage des objets cosmiques dans un large spectre (des ondes radio aux rayons γ), en étalonnant la masse de ces objets.

La masse des galaxies par exemple dépend de leur type, de leur nombre d'étoiles estimé, de leur comportement gravitationnel lorsqu'ils sont en interaction avec d'autres galaxies.

De même, on a estimé la masse des étoiles, du gaz des poussières, le tout étant affiné par un traitement statistique.

Compte tenu du nombre d'hypothèses sur lesquelles repose cette estimation, donc de la fragilité de ces estimations, il est essentiel de recouper un maximum d'informations provenant de méthodes si possible indépendantes pour les crédibiliser.

Cette observation ne donne qu'une projection en 2D sur la voûte céleste, il faut d'autres informations pour déterminer la distance qui permet de calculer le volume et donc la densité.

La méthode directe géométrique ne s'applique que pour les proches distances.

La loi de Kepler permet de déterminer avec précision la masse des étoiles doubles ou multiples à une échelle un peu plus lointaine.

Les céphéides (2 types), chandelles standards caractérisées par leur signature spectrale permettent d'aller beaucoup plus loin.

Enfin le Décalage vers le rouge est appliqué pour les objets très lointains (à appliquer avec circonspection comme l'illustre la suite).

La spectrométrie galactique s'est révélée très productive à cet effet (heureusement que les raies ne sont pas "équidistantes" on n'aurait pas pu observer de décalage)

À noter que tout cela ne donne pas des résultats très précis et présuppose beaucoup ce qui fait l'objet de beaucoup de débats passionnés.

On dispose également d'autres informations " génériques" qui permettent de borner certains paramètres

L'âge de l'Univers

Comme l'univers est suffisamment vieux (il a au moins l'âge du système solaire, on lui prête avec une certaine fiabilité un âge de 10 milliards d'années) on peut raisonnablement penser que sa densité est proche de la densité critique.

Tous les modèles montrent qu'avec une densité, surtout au début, même très peu différente de la densité critique la durée de vie des univers est fugace Soit ils se re-contractent soit ils s'évaporent très rapidement.

Et un âge tel que celui qu'on connaît prouve qu'au début de l'univers la densité devait être incroyablement proche de cette densité critique.

Avec l'expansion l'écart initial avec la densité critique (s'il n'est pas strictement nul) s'accroît, car instable.

Nucléosynthèse primordiale

La composition en éléments légers (hydrogène, deutérium, tritium, hélium) résultant de la nucléosynthèse primordiale dans le modèle du “Big Bang” chaud prédit que la masse volumique de la matière ordinaire doit représenter environ 6 % de la masse critique.

La valeur de la constante de Hubble mesurée

Même si la fourchette est large, de 40 à 90 km/sec /Mégaparsec, avec une moyenne à 65 /s/Mégaparsec qui correspond à l'âge de 10^{10} ans dans un Univers critique, ceci encadre les possibilités.

L'observation directe révèle un Univers beaucoup trop léger

On sait que cette estimation directe de matière visible ne rend compte au mieux que de 1 % de la matière qui correspond à la densité critique estimée à partir de la constante de Hubble.

À la recherche de la matière invisible

Il y a donc de la matière indétectable par son rayonnement.

L'étude des rotations des galaxies (lois de Kepler, la vitesse de rotation à une distance donnée dépend de la masse “centrale”) nous indique une masse cachée d'au moins 5 fois la masse visible. On suppose donc un halo de matière qui doit s'étendre au-delà. Donc, de bonnes présomptions existent sur l'existence de matière ordinaire invisible (planètes géantes, naines brunes, MACHOs, nuages de gaz ténus, trous noirs), à hauteur de cinq fois la matière visible

L'étude du mouvement local d'amas de galaxies nous conduit à porter ce chiffre à 50. Ce qui conduit à 50 % de la densité critique.

Une étude d'envergure sur 577 galaxies a mis en évidence des perturbations de vitesse par un grand attracteur, concentration de masse invisible équivalente à des centaines de milliers de galaxies situé à environ 200 Ma.l dans la direction de la constellation du Centaure.

La masse manquante détectée

On arrive compte tenu de la précision très relative à quelque chose de proche de la densité critique répartie comme suit

Matière visible ordinaire (baryonique)	~ 1%
Matière invisible ordinaire (baryonique)	~ 5%
Matière invisible exotique (non baryonique)	~ 94%
Total	~100%

Discussion sur les méthodes d'évaluation des paramètres cosmologiques

Nous aimerions déterminer avec précision la valeur des paramètres clés pour savoir quel destin nous attend. En particulier H_0 , du fait de sa relation avec l'âge de l'Univers.

Pour un Univers de matière pure, avec $k = 0$, (49) implique que l'âge est $2 / (3H_0)$.

D'autres possibilités permettraient de prédire des relations similaires. On aimerait connaître Ω , qui détermine k par (41). d'après la définition (39) de Ω , ceci signifie que nous voulons à la fois H_0 et ρ_0 .

Malheureusement ces paramètres sont difficiles à mesurer précisément en particulier le paramètre ρ .

Le paramètre de décélération q

Mais notons que le paramètre de décélération q est lié à Ω par (35) :

$$\begin{aligned}
 q &= -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \\
 &= -H^{-2}\frac{\ddot{a}}{a} \\
 &= \frac{4\pi G}{3H^2}(\rho + 3p) \\
 &= \frac{4\pi G}{3H^2}\rho(1 + 3w) \\
 &= \frac{1 + 3w}{2}\Omega .
 \end{aligned} \tag{60}$$

En conséquence, si on connaît w (c.a.d de quoi est fait notre univers) on peut déterminer Ω en mesurant q .

On est pas très sûr de w , et q est difficile à mesurer. Mais on essaie !

Méthode de mesure

Pour comprendre comment on peut raisonnablement mesurer ces paramètres considérons le mouvement géodésique dans un Univers FRW. Nous avons des vecteurs Killing de type espace mais pas de vecteur de Killing de type temps pour nous donner une notion de l'énergie conservée.

Pourtant nous avons un tenseur de Killing. Si $U^\mu = (1, 0, 0, 0)$ est la quadrivitesse des observateurs comobiles alors le tenseur :

$$K_{\mu\nu} = a^2(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu) \tag{61}$$

satisfait $\nabla_{(\sigma} K_{\mu\nu)} = 0$ (on peut le vérifier), et est donc un *tenseur de Killing*.

Cela signifie que si une particule a une quadrivitesse $V^\mu = dx^\mu / d\lambda$, la quantité :

$$K^2 = K_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = a^2[V_\mu V^\mu + (U_\mu V^\mu)^2] \tag{62}$$

va être conservée sur la géodésique. Examinons ce cas, d'abord pour les particules massives. Alors on a $V_\mu V^\mu = -1$, soit :

$$(V^0)^2 = 1 + |\vec{V}|^2, \quad (63)$$

où $|\vec{V}|^2 = g_{ij}V^iV^j$. alors (62) implique :

$$|\vec{V}| = \frac{K}{a}. \quad (64)$$

La particule alors ralentit dans le système de coordonnées comobiles quand l'univers s'étend. C'est un vrai ralentissement dans le sens où un gaz de particules animées d'un mouvement relatif rapide va se refroidir quand l'univers s'étend

Le même phénomène se produit sur les géodésiques nulles (lumière). Dans ce cas $V_\mu V^\mu = 0$, et (62) impliquent :

$$U_\mu V^\mu = \frac{K}{a}. \quad (65)$$

Mais la fréquence du photon mesuré par un observateur est $\omega = -U_\mu V^\mu$. La fréquence du photon émis avec une fréquence ω_1 va alors être observée à une fréquence différente ω_0 plus faible si l'univers est en expansion, (respectivement plus grande s'il était en contraction) :

$$\frac{\omega_0}{\omega_1} = \frac{a_1}{a_0}. \quad (66)$$

Décalage vers le rouge

Les cosmologistes aiment dénommer ceci par le terme décalage vers le rouge z entre deux événements, définis par le ratio de la variation en longueur d'onde :

$$\begin{aligned} z &= \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_1} \\ &= \frac{a_0}{a_1} - 1. \end{aligned} \quad (67)$$

Notons que ce Décalage vers le rouge n'est pas un effet Doppler conventionnel. C'est l'expansion de l'espace et non pas la vitesse relative qui en est la source.

On peut mesurer le Décalage vers le rouge, car on connaît la longueur d'onde dans un référentiel au repos de diverses raies spectrales émises par des galaxies lointaines, donc on connaît le décalage subi pendant leur trajet entre leur temps d'émission t_1 et de réception t_0 .

Rapport des facteurs d'échelle

On connaît le rapport des facteurs d'échelle à ces instants.

Mais on ne connaît pas les temps, les photons n'indiquant pas combien de temps s'est écoulé pendant leur trajet.

Il faut approfondir ce point pour obtenir cette information.

En gros, comme un photon se déplace à la vitesse de la lumière, son temps de trajet devrait être sa distance (unité c) Mais comment définir la distance d'une galaxie lointaine dans un univers en expansion.

La distance comobile n'est d'aucune utilité, car non mesurable et de surcroît on ne connaît pas la vitesse propre de cette galaxie.

Distance de luminosité

À la place, définissons la distance de luminosité comme :

$$d_L^2 = \frac{L}{4\pi F}, \quad (68)$$

où L est la luminosité absolue de la source et F le flux mesuré par l'observateur (énergie par unité de temps, unité de surface d'un détecteur donné).

La définition vient du fait que dans un espace plat, pour une source à une distance d , le flux sur la luminosité est juste un sur la surface d'une sphère centrée sur la source, $F/L = 1/A(d) = 1/4\pi d^2$.

Dans un Univers FRW, cependant, le flux va être dilué. La conservation des photons nous dit que le nombre total de photons émis par la source va traverser la sphère à la distance comobile r de l'émetteur.

Une telle sphère est à une distance physique $d = a_0 r$, ou a_0 est le facteur *d'échelle* quand les photons sont observés. Mais le flux est dilué par deux effets additionnels :

Le Décalage vers le rouge individuel des photons par un facteur $(1+z)$ et le fait que les photons touchent la sphère moins fréquemment du fait que deux photons émis à δt d'intervalle vont être mesurés à $(1+z)\delta t$ d'intervalle. Donc il vient :

$$\frac{F}{L} = \frac{1}{4\pi a_0^2 r^2 (1+z)^2}, \quad (69)$$

où

$$d_L = a_0 r (1+z). \quad (70)$$

Méthode de calcul de H_0 et q à partir de la distance de luminosité et du Décalage vers le rouge z

La distance de luminosité d_L est mesurable du fait que la luminosité absolue de certaines sources astrophysiques est connue (chandelles standards). Mais r n'est pas observable, nous devons l'éliminer de l'équation.

Sur une géodésique lumière choisie radiale pour la circonstance, on a :

$$0 = ds^2 = -dt^2 + \frac{a^2}{1 - kr^2} dr^2, \quad (71)$$

où

$$\int_{t_1}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \int_0^r \frac{dr}{(1 - kr^2)^{1/2}} . \quad (72)$$

Pour les galaxies pas trop lointaines on peut développer le facteur d'échelle en série de Taylor autour de sa valeur actuelle.

$$a(t_1) = a_0 + (\dot{a})_0(t_1 - t_0) + \frac{1}{2}(\ddot{a})_0(t_1 - t_0)^2 + \dots . \quad (73)$$

Si on développe les deux membres de (72) on trouve :

$$r = a_0^{-1} \left[(t_0 - t_1) + \frac{1}{2} H_0 (t_0 - t_1)^2 + \dots \right] . \quad (74)$$

d'après (67), l'expansion (73) est identique à :

$$\frac{1}{1+z} = 1 + H_0(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t_1 - t_0)^2 + \dots . \quad (75)$$

Pour $H_0(t_1 - t_0)$ petit, ceci peut être inversé et donne :

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \left[z - \left(1 + \frac{q_0}{2}\right) z^2 + \dots \right] . \quad (76)$$

En substituant de nouveau dans (74) cela donne :

$$r = \frac{1}{a_0 H_0} \left[z - \frac{1}{2} (1 + q_0) z^2 + \dots \right] . \quad (77)$$

Finalement en l'utilisant dans (70) on a la loi de Hubble :

$$d_L = H_0^{-1} \left[z + \frac{1}{2} (1 - q_0) z^2 + \dots \right] . \quad (78)$$

Donc la mesure de la distance de luminosité et du "décalage vers le rouge" d'un nombre suffisant de galaxies nous permet de déterminer H_0 et q_0 , et nous fournissent une piste permettant de déterminer dans quel type FRW nous vivons.

Les observations sont délicates et les valeurs de ces paramètres très contestés.

Dans la prochaine décade de nouvelles stratégies et des applications plus précises des anciennes stratégies pourraient nous permettre d'obtenir des réponses fiables.

Note du traducteur : C'est le cas avec l'étude des supernovas à redshift élevé qui a mis en évidence une accélération de l'expansion.