

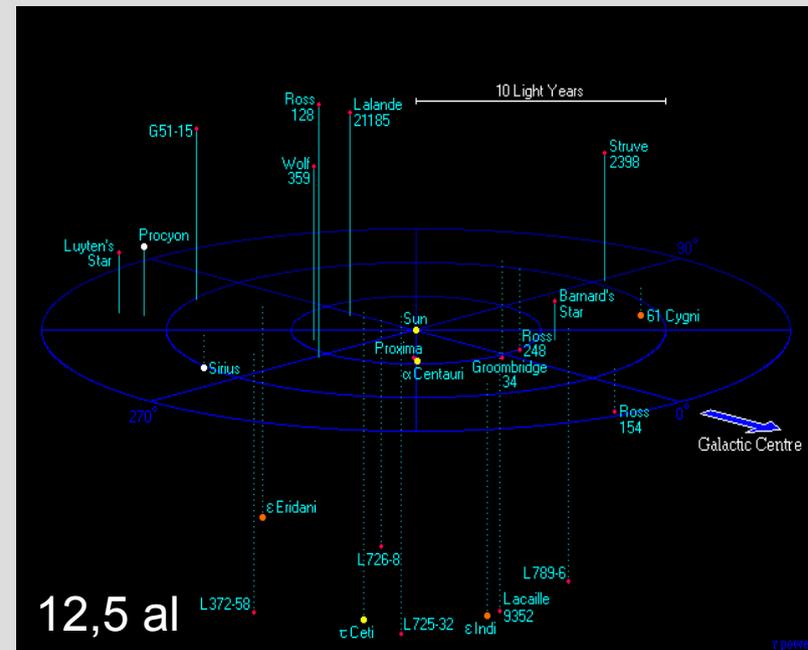
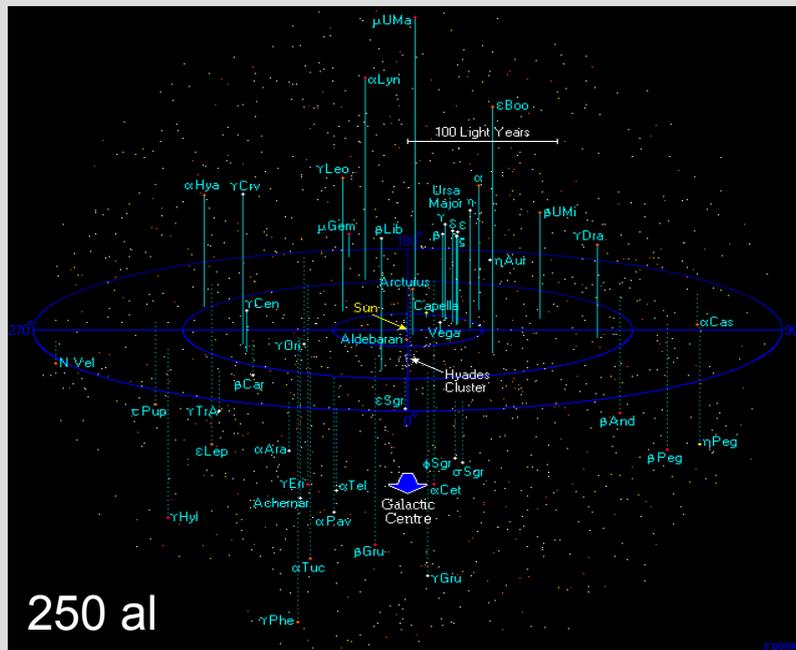
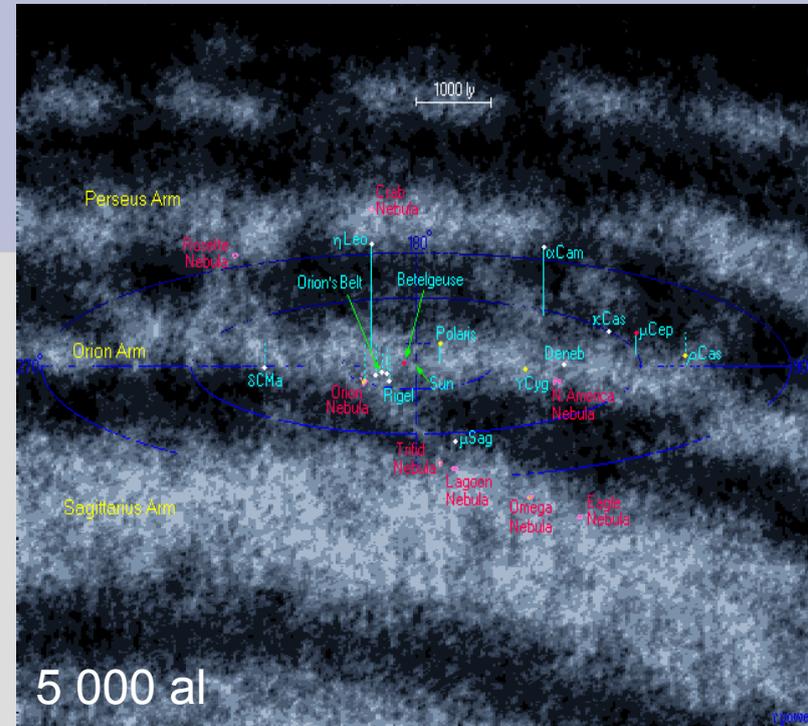
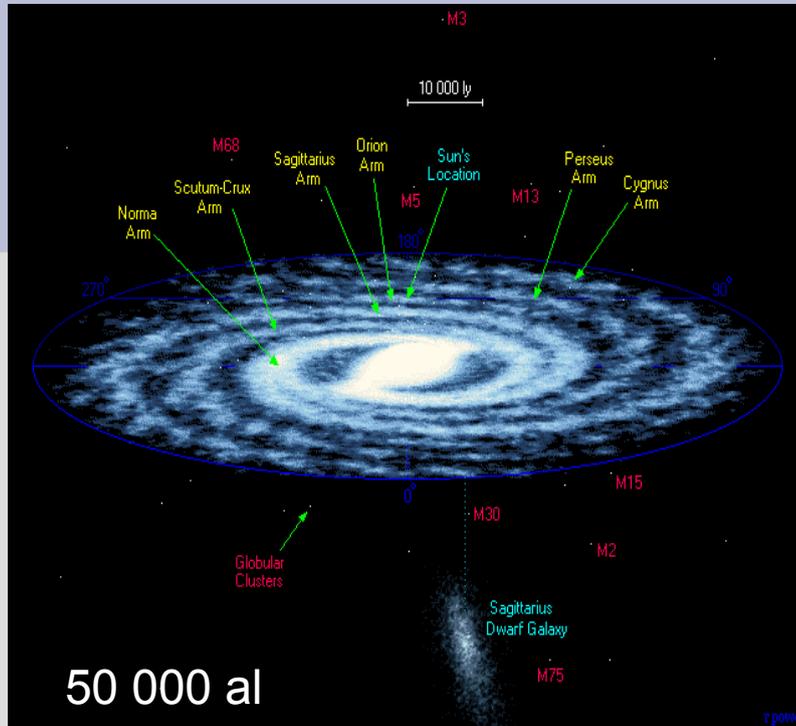
# Cours de cosmologie

## Homogénéité et isotropie, diverses distances, facteur d'échelle

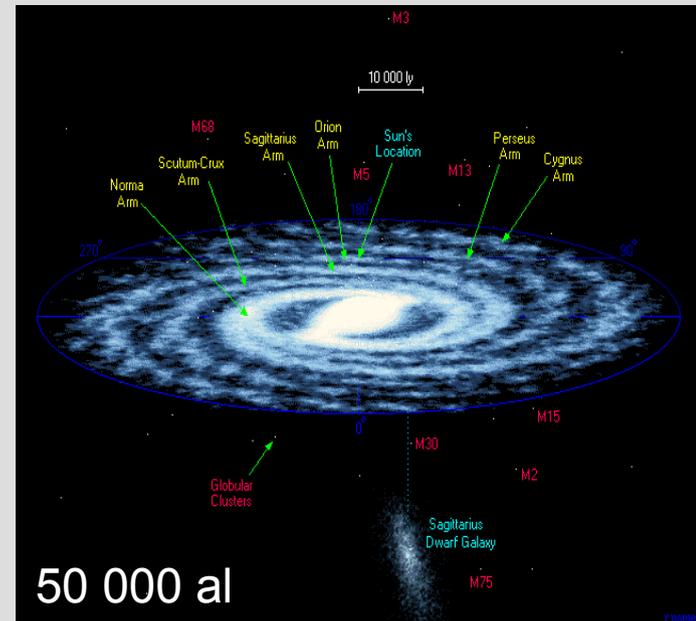
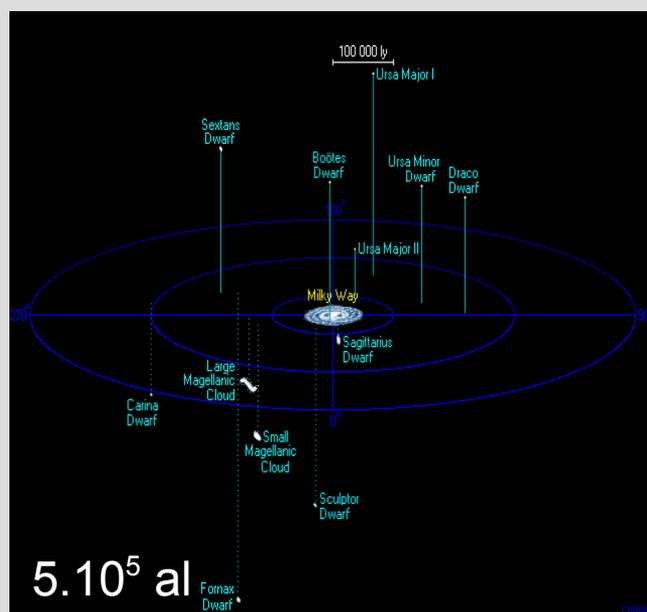
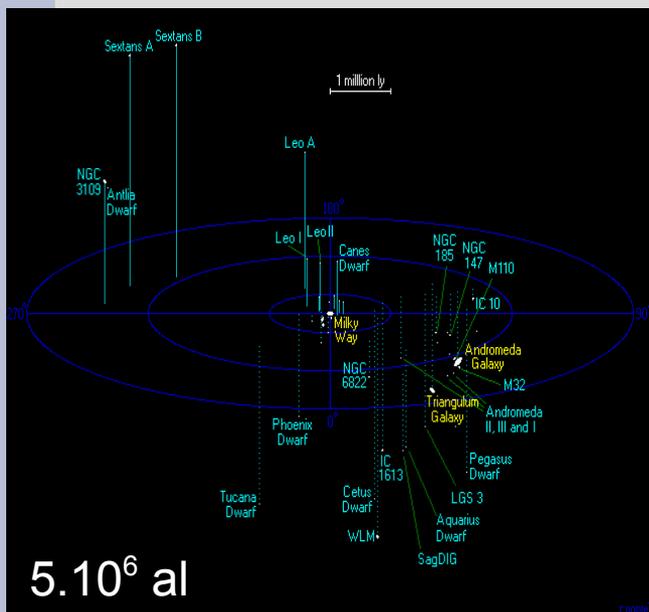
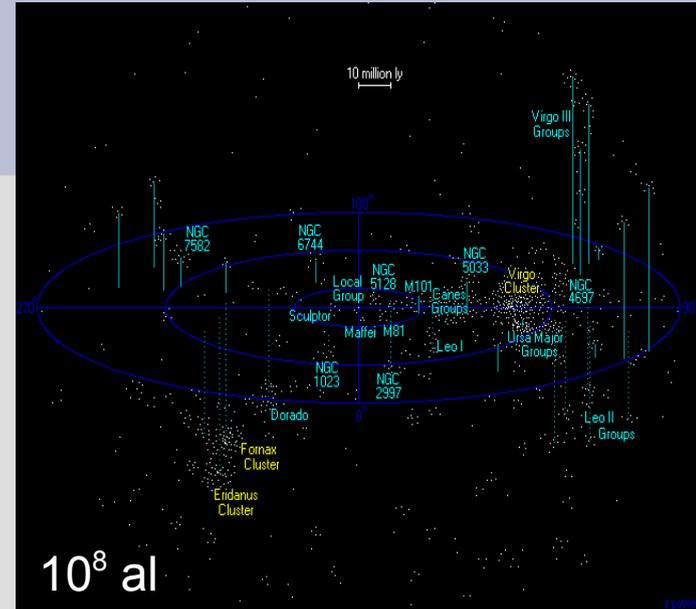
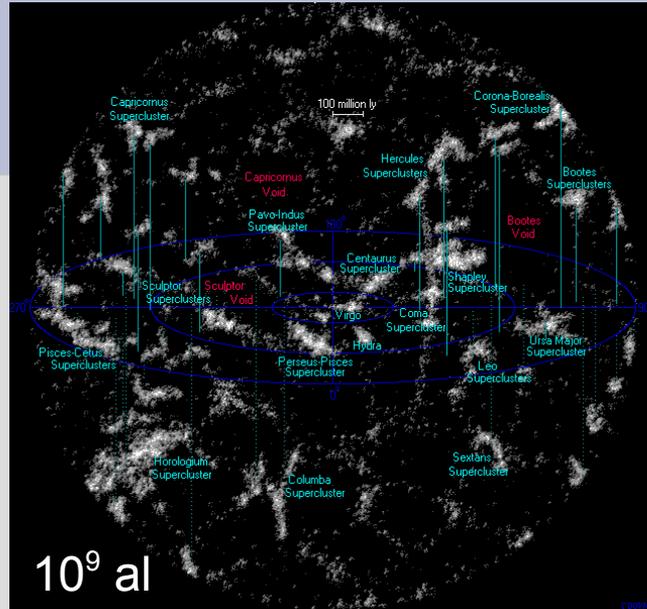
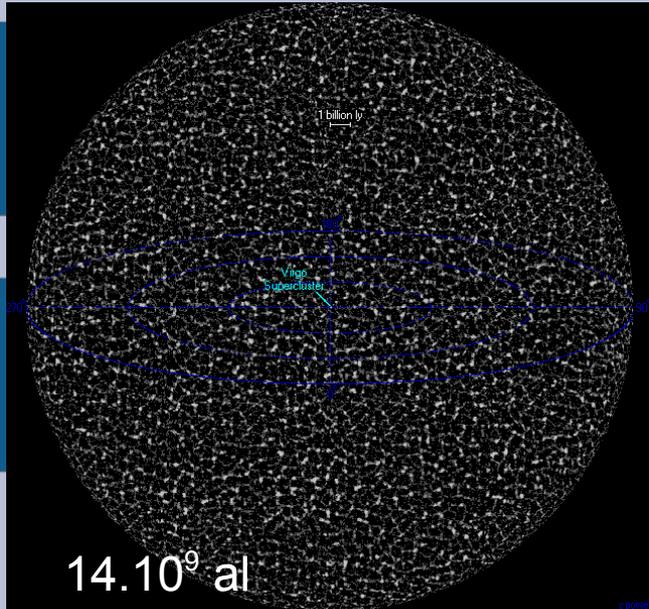
Le principe cosmologique

S.A.F : Cours de Cosmologie 2013 par Jacques Fric

# Le soleil dans la galaxie



# L'Univers est homogène et isotrope



# L'Univers est homogène et isotrope

Dire que l'Univers est homogène signifie que toutes les caractéristiques mesurables de l'univers sont les mêmes partout. En particulier ne pas déduire de l'image à l'échelle maximale sur la diapo précédente que l'univers est une sphère.

Ce n'est que la perception de notre point de vue co-mobile (nous sommes au centre) mais tous les observateurs co-mobiles ont la même perception statistique.

Ceci n'est approximativement vrai, mais cela se révèle être une excellente approximation sur des domaines très étendus.

Comme l'âge de l'Univers est une caractéristique observable, l'homogénéité de l'univers doit se retrouver sur une surface de temps propre constant depuis le Big bang.

La dilatation temporelle fait que le temps propre mesuré par un observateur dépend de la vitesse de cet observateur, **donc nous précisons que la variable de temps  $t$  de la loi de Hubble est le temps propre écoulé depuis le Big Bang pour des observateurs comobiles**

# Homogénéité et isotropie: Conséquences

Le principe cosmologique est une hypothèse si forte qu'elle suffit à déterminer la métrique de l'espace-temps.

La forme générale de cette métrique, due à Robertson et à Walker, est postérieure aux travaux de Friedmann, Eddington et Lemaître sur les univers homogènes et isotropes.

Si l'univers est isotrope autour d'un point, tous les observateurs équidistants de ce point doivent observer les mêmes valeurs pour la densité, la température, la pression, la composition chimique, la vitesse d'expansion...

Si l'univers est isotrope en tout point, tous les observateurs observent ces mêmes valeurs partout (homogénéité).

Il existe alors dans l'espace-temps des hypersurfaces à 3 dimensions où ces propriétés locales ont la même valeur, un "feuilletage" de l'espace-temps en sous-espaces de symétrie maximale.

La normale à ces hypersurfaces, du genre temps, définit le "temps cosmique"  $t$ .

# Vous avez dit distance?

Nous allons voir qu'il existe en cosmologie un grand nombre de définitions pour la « distance » entre nous et un objet. Par exemple N. Wright en cite plus de trente.

Bien entendu elles ne sont pas toutes indépendantes, mais il est déroutant de constater que pour un objet donné, ces définitions de distance donnent des valeurs différentes.

Le bon sens nous dicte qu'un objet ne peut pas être à plusieurs distances « à la fois » et qu'un tel constat est absurde !

Bien entendu, cela s'explique par le fait que ces distances répertoriées sous un même vocable ne correspondent pas en fait à la même définition.

En effet dans un univers dynamique comme l'univers qui est en expansion, une notion universelle de distance supposerait une notion de simultanéité commune à tous les observateurs. S'il existe en cosmologie standard, un temps cosmologique, bien utile, qui peut faire référence cela ne résout pas pour autant le problème de la mesure spatiale à un même temps (cosmologique) entre deux points (en particulier très éloignés). Alors doit on se résoudre à rester dans l'ignorance ?

Nous allons montrer que tout en distinguant bien les notions de distances « géométriques » liées au modèle et les distances « observables » qui sont physiques, comment à partir des prédictions du modèle faire un « test d'hypothèse » permettant de discriminer les modèles.

# Vous avez dit distance? Distance de Hubble

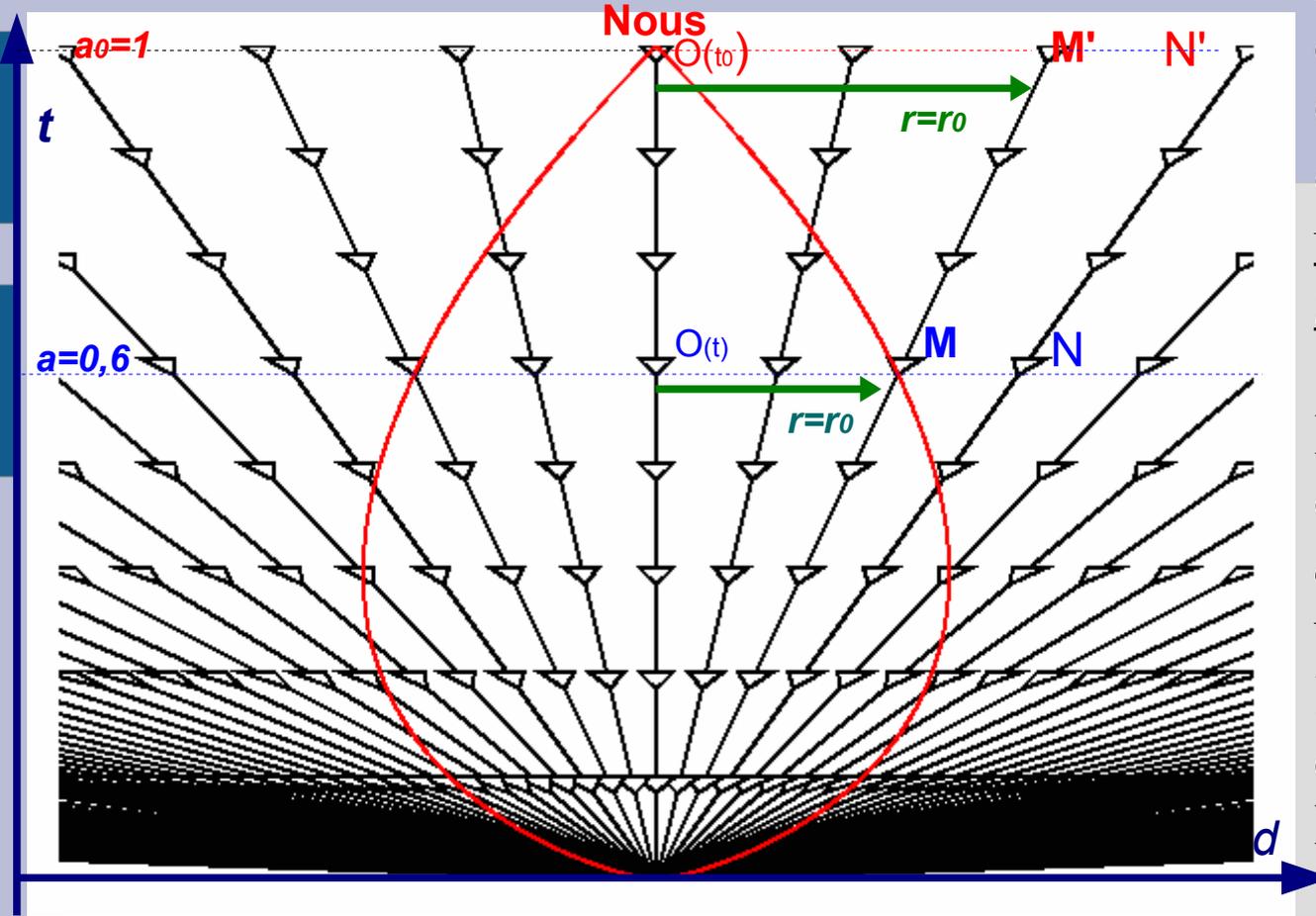
Commençons par nous intéresser à la plus célèbre d'entre elle !

La loi de Hubble ( $v = HD$ ) est vraie pour toutes les valeurs de  $D$ , même très grandes qui donnent  $v > c$ , sous réserve d'interpréter correctement la distance  $D$  et la vitesse  $v$ .

Cette distance est la distance géométrique qu'on peut calculer à partir de la métrique de Robertson Walker à temps constant: section spatiale ( $dt = 0$ ).

En général ce n'est pas une observable, mais elle a un sens géométrique bien défini et peut être calculée à partir d'observables à condition de disposer d'un modèle.

# Distance de Hubble



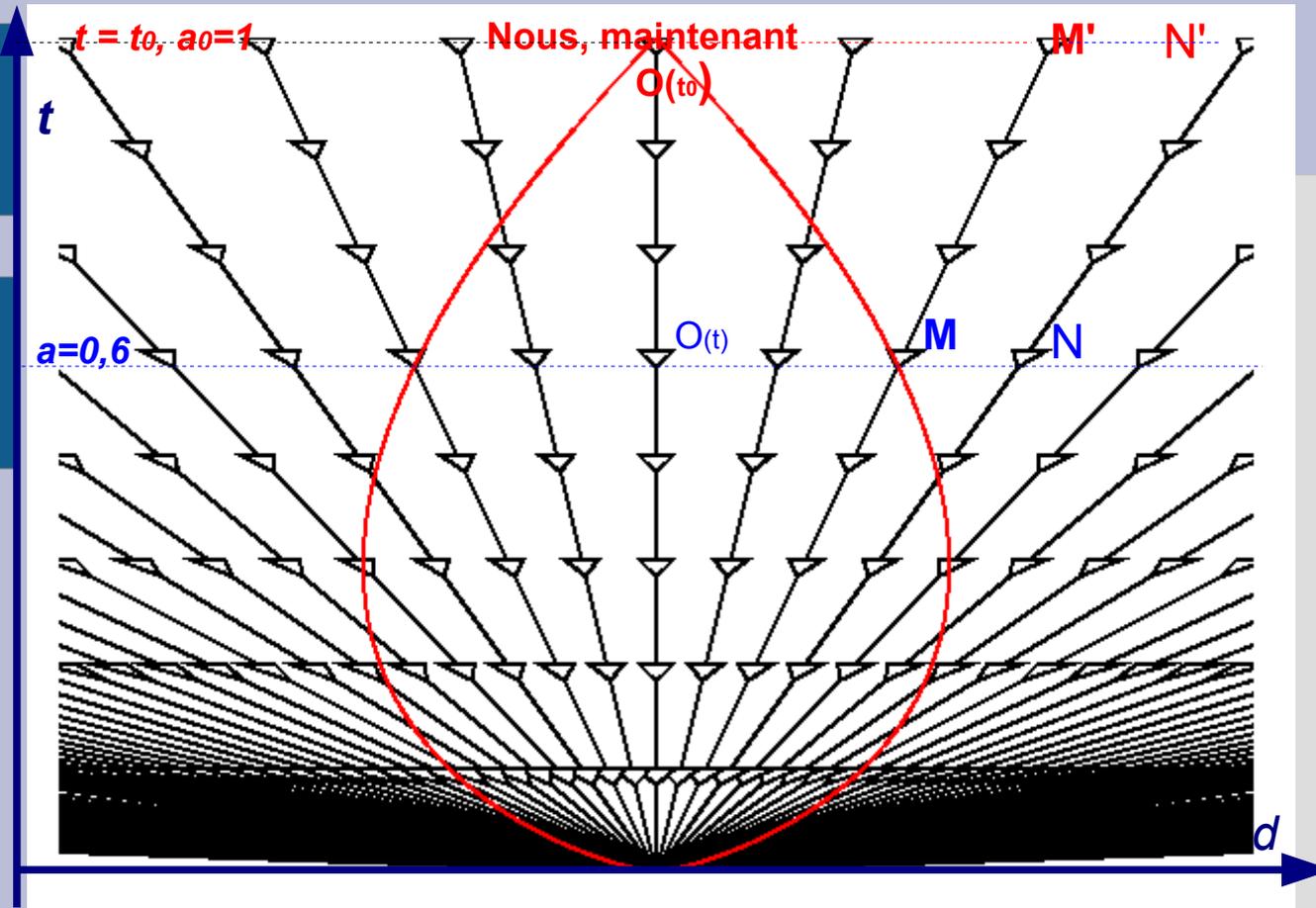
Le diagramme d'espace temps ci contre représente un modèle Cosmologique de densité zéro, en fait de densité très faible, qui utilise les coordonnées  $D_{actuel}$  et  $t$  de la loi de Hubble.

Les lignes d'Univers des observateurs co-mobiles:  $r = cste$ ) sont assorties de quelques uns de leurs cônes de lumière locaux, visualisant la distorsion de la représentation.

Rappel:  $z = a(t_r)/a(t_e) - 1 = a_0/a - 1$

La courbe rouge en forme de poire est notre "cône" du passé [ qui tient compte de sa distorsion liée à l'expansion, d'où la forme]. Cette courbe rouge a localement la même pente que les petits cônes de lumière, dont on voit l'utilité. Dans cette représentation les vitesses supérieures à  $c$  sont possibles et comme les Univers ouverts sont spatialement infinis, elles sont en fait nécessaires.

# Distance de Hubble



Les isochrones ( $t = \text{constante}$ ) sont horizontales: Maintenant est noté  $t_0$ . Notre ligne d'univers est au centre. La ligne d'univers de la galaxie M est la deuxième à droite. Nous voyons que sa distance de Hubble « maintenant » à  $t_0$  où le facteur d'échelle vaut  $a_0 = 1$  est représentée par le segment  $O(t_0)M'$ .

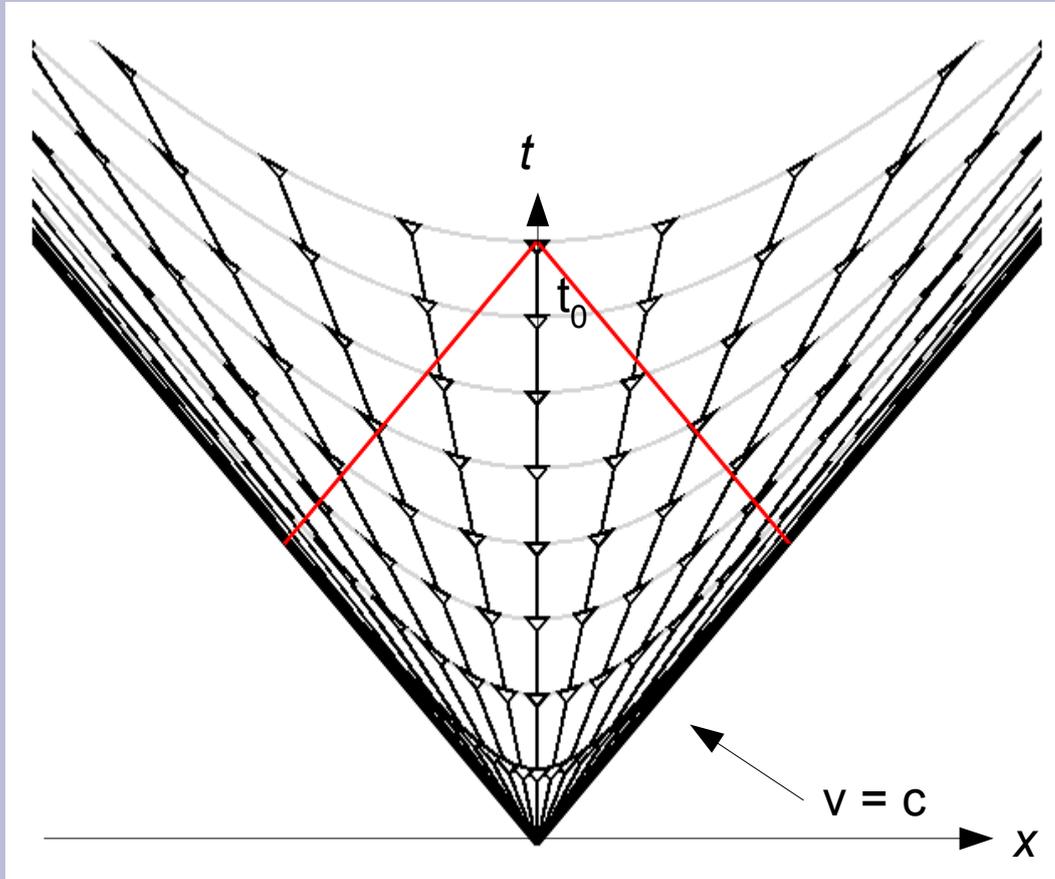
Au temps  $t$  où le facteur d'échelle valait  $a = 0,6$  sa distance de Hubble était représentée par le segment  $O(t)M$ .

Si elle valait  $10 \text{ Mpc}$  au temps  $t$ , elle vaudra  $10 \text{ Mpc}(a_0/a) = 10(1/0,6) = 16,6 \text{ Mpc}$  à  $t_0$ .

Notons que nous recevons « maintenant » à  $t_0$  la lumière qui a été émise par la galaxie M au temps  $t$ . L'univers s'est étendu pendant que la lumière cheminait le long de la courbe rouge de M en  $O(t_0)$ . Mais nous voyons la galaxie telle qu'elle était quand sa lumière a été émise.

Dans ce modèle d'univers vide, l'équation des lignes d'univers est:  $d = a.t.d_c$ , où  $d_c$  est la distance comobile et  $a = \text{constante}$ . L'expansion est linéaire par rapport au temps cosmique.

# Distance de Hubble



Il n'y a pas de contradiction avec la Relativité Restreinte qui stipule que rien ne peut aller plus vite que la lumière, du fait que dans ce diagramme les "vitesses" sont définies à partir d'autres coordonnées  $t$  et  $x$  que celles de la RR. Si on représente le même diagramme d'espace temps dans les coordonnées  $x$  et  $t$  de la Relativité restreinte nous obtenons la figure ci contre. Les hyperboles grises matérialisent les surfaces à temps propre constant depuis le Big Bang.

On voit que le cône de lumière coupe la ligne d'univers des galaxies les plus lointaines à  $x = \frac{1}{2}ct_0$  pour  $t = \frac{1}{2}t_0$ . La distance de Hubble, aujourd'hui, donc à  $t = t_0$  donnée par la valeur de  $x$  à l'intersection de l'hyperbole associée à  $t = t_0$  et la ligne d'univers de ces galaxies est infinie sur ce diagramme! Notons que ce diagramme se déduit du précédent en « refermant à moitié l'éventail » des lignes d'univers.

**Effet Doppler relativiste :  $D = \lambda_r/\lambda_e = \gamma (v) (1+v_r)$  avec  $\gamma (v) = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$**

# Quelques autres « distances »

## Distance angulaire

On voit le rôle particulier que joue la distance de Hubble qui n'est pas une observable (sauf pour les petites distances où elle donne au premier ordre une approximation) même si elle est bien définie géométriquement car elle suppose la possibilité d'observer des objets très distants au même moment, même si ce temps est bien défini par l'âge de l'univers. Mais nous verrons qu'à partir d'observables et de modèles nous pourrions la calculer. Il va donc être nécessaire de définir ces observables qui vont être des indicateurs de distance.

L'une d'entre elles, est la "*distance de taille angulaire*" définie par :

$$\theta = \text{taille}/D_A \quad \text{d'où} \quad D_A = \text{taille}/\theta$$

où la taille est la taille transversale, [supposée connue de façon absolue ], d'un objet et  $\theta$  est l'angle (en radians) qu'il sous tend dans le ciel.

Comme nous le verrons, la distance angulaire passe par un maximum quand l'expansion suit une loi telle que  $a(t) = t^\alpha$  ! Pour le modèle à densité zéro, la coordonnée  $x$  de la Relativité Restreinte est égale à la distance de taille angulaire,  $x = D_A$ .

# Quelques autres « distances »

## Distance de Luminosité

Un autre indicateur important de distance est le flux lumineux reçu d'un objet, [dont la luminosité absolue est supposée connue ( chandelle standard)], ceci permettant de définir la *distance de luminosité*  $D_L$  par:

$$D_L^2 = L / 4\pi F$$

où  $L$  est la luminosité absolue de la source et  $F$  le flux mesuré par l'observateur ( énergie par unité de temps, unité de surface d'un détecteur donné).

La définition vient du fait que dans un espace plat, pour une source à une distance  $d$ , le rapport du flux sur la luminosité vaut 1 divisé par la surface de la sphère centrée sur la source,

$$F/L = 1/A(d) = 1/4\pi d_L^2$$

# Quelques autres « distances »

## Distance de Luminosité

Dans un Univers FLRW , cependant, le flux va être dilué. La conservation des photons nous dit que le nombre total de photons émis par la source va traverser la sphère à la distance comobile  $r$  de l'émetteur.

Une telle sphère est à une distance physique  $d = a_0 r$ , ou  $a_0$  est le facteur d'échelle quand les photons sont observés.

Mais le flux est dilué par deux effets additionnels:

Le Décalage vers le rouge individuel des photons par un facteur  $(1 + z)$ , et le fait que les photons traversent la sphère moins fréquemment du fait que deux photons émis à  $\delta t$  d'intervalle vont être mesurés à  $(1 + z) \delta t$  d'intervalle.

Donc  $F/L = 1/4\pi d_L^2$  devient:

$$F/L = 1/4\pi a_0^2 r^2 (1 + z)^2$$

Avec  $d_L^2 = L / 4\pi F$  La distance de luminosité vaut alors :

$$d_L = a_0 r (1 + z)$$

.

# Quelques autres « distances »

## Temps de parcours de la lumière, horizon, dilatation temporelle.

Une autre distance est définie à partir de son temps de parcours par la lumière:

$$d_{ltt} = c.(t_o - t_{em}).$$

Ceux qui disent que la plus grande distance à laquelle nous pouvons voir est  $c.t_o$  utilisent cette notion de distance.

Mais  $c.(t_o - t_{em})$  n'est pas une distance très mesurable, car il est difficile de déterminer  $t_{em}$ , l'âge de l'Univers auquel la lumière que nous recevons a été émise.

En fait, on la déduit d'autres observations quand on dit par exemple qu'on observe une galaxie alors que l'univers n'était âgé que de 1 milliard d'année (il y donc 12,7 milliards d'année), ce qui est assez parlant!

# Quelques autres « distances »

## Temps de parcours de la lumière, horizon, dilatation temporelle.

Avec la métrique de Robertson Walker :  $ds^2 = -dt^2 + a(t)^2[dr^2/(1-kr^2) + d\Omega^2]$

Pour un photon radial  $ds^2 = 0$  donne:

$$dt/a(t) = dr.(1-kr^2)^{-1/2}$$

en intégrant:

$$\int_{t_e}^{t_0} dt/a(t) = \int_r^0 dr.(1-kr^2)^{-1/2}$$

Le membre de gauche donne le temps de parcours de la lumière (en coordonnées co-mobiles) entre le temps d'émission  $t_e$  et aujourd'hui  $t_0$ , celui de droite donne la distance parcourue en coordonnées co-mobiles (nous sommes à  $r = 0$  dans ces coordonnées).

La distance de Hubble  $d_H$  (aujourd'hui) s'obtient en multipliant par le facteur d'échelle aujourd'hui  $a_0(t)$ .

Cette équation, valide sur le modèle géométrique, se heurte au problème de la non connaissance du temps d'émission en général. Nous verrons comment elle peut être transformée pour s'exprimer à partir d'observables.

# Horizons

## Horizon des événements

C'est le point le plus éloigné dont nous pouvons recevoir, aujourd'hui, un signal lumineux

**Cet horizon s'obtient en faisant tendre le temps d'émission vers 0.**

$$d_H = a_0(t) \int_r^0 dr \cdot (1 - kr^2)^{-1/2} = a_0(t) \int_0^{t_0} dt/a(t)$$

En prenant :  $a(t) = t^{2/3}$ ,  $a_0(t) = t_0^{2/3}$ ,

et la primitive de  $t^{-2/3}$  valant  $3 \cdot t^{1/3}$  on voit que cela donne:

$$d_H = a_0(t) \int_r^0 dr \cdot (1 - kr^2)^{-1/2} = a_0(t) \int_0^{t_0} dt/t^{2/3} = (t_0^{2/3})(3 \cdot t_0^{1/3}) = 3t_0.$$

On pourrait vérifier que pendant la phase radiative  $a(t) = (t/t_0)^{1/2}$  on obtiendrait  $2t_0$ .

## Horizon particule

C'est le point le plus éloigné dont on pourra recevoir un signal dans le futur. Il dépend du modèle cosmologique. Dans univers critique matière : Asymptotiquement big bang !

# Dilatation temporelle

**Cette même équation est utilisée pour démontrer la dilatation temporelle.**

$$\int_{t_e}^{t_0} dt/a(t) = \int_{t_e+\delta t_e}^{t_0+\delta t_0} dt/a(t) = -\int_0^r dr \cdot (1-kr^2)^{-1/2}$$

En posant :  $A(t) = \int_{t_e}^{t_0} dt/a(t)$

$$\text{On a : } A(t_0) - A(t_e) = A(t_0 + \delta t_0) - A(t_e + \delta t_e) = -\int_0^r dr \cdot (1-kr^2)^{-1/2}$$

$$A(t_0 + \delta t_0) = A(t_0) + \delta t_0/a(t_0), \quad A(t_e + \delta t_e) = A(t_e) + \delta t_e/a(t_e)$$

$$\text{Alors : } A(t_e + \delta t_e) - A(t_e) = A(t_0 + \delta t_0) - A(t_0)$$

$$\text{S'écrit : } A(t_e) + \delta t_e/a(t_e) - A(t_e) = A(t_0) + \delta t_0/a(t_0) - A(t_0) = \delta t_e/a(t_e) = \delta t_0/a(t_0) \rightarrow a(t_0)/a(t_e) = \delta t_0/\delta t_e$$

## Exemple :

Dans le cas du modèle critique de matière, la nucléosynthèse (qui a duré environ 200 secondes en temps cosmologique) serait observée sur Terre dilatée d'un facteur  $10^9$  : Elle durerait environ un millénaire ! Le big bang serait « observé » au bout d'un temps infini !

# Quelques autres « distances »

## Décalage spectral

Finalement, la distance le *décalage spectral* noté  $z$  est un indicateur très important de distance, car les astronomes savent le mesurer très précisément, alors que la taille ou la luminosité nécessaires pour calculer  $D_A$  ou  $D_L$  sont toujours très difficiles à déterminer.

Par contre  $z$  n'indique que le rapport des facteurs d'échelle,  $z = (a_0/a) - 1$ , de l'univers entre l'émission du photon et sa réception: .

Il n'indique pas comment on passe de l'un à l'autre.

Mais il est l'indicateur de distance le plus précieux et sert de variable de référence pour comparer les autres distances!

La composition des observables va permettre de sélectionner le ou les modèles qui prédisent les résultats qu'on constate.

# Quelques autres « distances »

## Détermination du décalage spectral dans un univers en expansion.

Pour comprendre comment on peut raisonnablement mesurer ces paramètres considérons le mouvement géodésique dans un Univers FLRW.

Nous avons des vecteurs Killing de type espace mais pas de vecteur de Killing de type temps pour nous donner une notion de l'énergie conservée.

Pourtant nous avons un tenseur de Killing. Si

$$U^\mu = (1, 0, 0, 0)$$

est la quadri vitesse des observateurs comobiles alors

$$K_{\mu\nu} = a^2 (g_{\mu\nu} - U_\mu U_\nu)$$

satisfait  $\nabla_{(\sigma} K_{\mu\nu)} = 0$  (on peut le vérifier), et est donc un tenseur de Killing.

Cela signifie que si une particule a une quadri vitesse  $V^\mu = dx^\mu/d\lambda$ , la quantité

$$K^2 = K_{\mu\nu} V^\mu V^\nu = a^2 [V_\mu V^\mu + (U_\mu V^\mu)^2] \quad (1)$$

va être conservée sur la géodésique.

# Quelques autres « distances »

Examinons ce cas , d'abord pour les particules massives. Alors on a  $V_\mu V^\mu = -1$ , soit  $(V^0)^2 = 1 + |V|^2$  où  $|V|^2 = g_{\mu\nu} V^\mu V^\nu$  , comme  $U_\mu V^\mu = U_0 V^0 = -V^0$ , alors (1) implique  $|V| = K/a$ :

La particule alors ralentit dans le système de coordonnées comobiles quand l'univers s'étend.

C'est un vrai ralentissement dans le sens où un gaz de particules animées d'un mouvement relatif rapide va se refroidir quand l'univers s'étend

Le même phénomène se produit sur les géodésiques nulles.

Dans ce cas  $V_\mu V^\mu = 0$ , et (1) impliquent:  $U_\mu V^\mu = K/a$  Mais la fréquence du photon mesuré par un observateur est  $\omega = -U_\mu V^\mu$ .

La fréquence du photon émis avec une fréquence  $\omega_1$  va alors être observé à une fréquence plus faible  $\omega_0$  du fait de l'expansion selon:  $\omega_0 / \omega_1 = a_1 / a_0$

# Décalage Spectral et distance

Les courbes représentant les relations entre ces différentes distances dépendent du modèle cosmologique.

A partir de leur définition, chaque modèle permet de calculer la relation entre les différentes distances en particulier entre  $z$  et les autres « distances ». Ce point est fondamental.

Le décalage spectral  $z$  va souvent être pris comme variable du fait de son caractère général commun,  $z = (a_0/a) - 1$ .

Il ne caractérise que le rapport des facteurs d'échelle entre la réception et l'émission des photons observés.

Ces distances ont un caractère physique spécifique mais on peut s'en abstraire car pour un même objet observé, elles sont différentes ce qui ne leur confère pas de statut de distance objective qui serait unique:

Le meilleur candidat serait la distance de Hubble, (définition géométrique claire). Elles vont permettre de discriminer par ajustement aux observations les différents modèles qui sont compatibles avec les observations

# Décalage Spectral et distance

L'abaque "décalage spectral" (redshift) fonction de la distance de luminosité pour les supernovae de Type Ia, ci après, est en fait une abaque de  $cz$  fonction de  $D_L$ , du fait que le flux lumineux est utilisé pour déterminer la distance des supernovae.

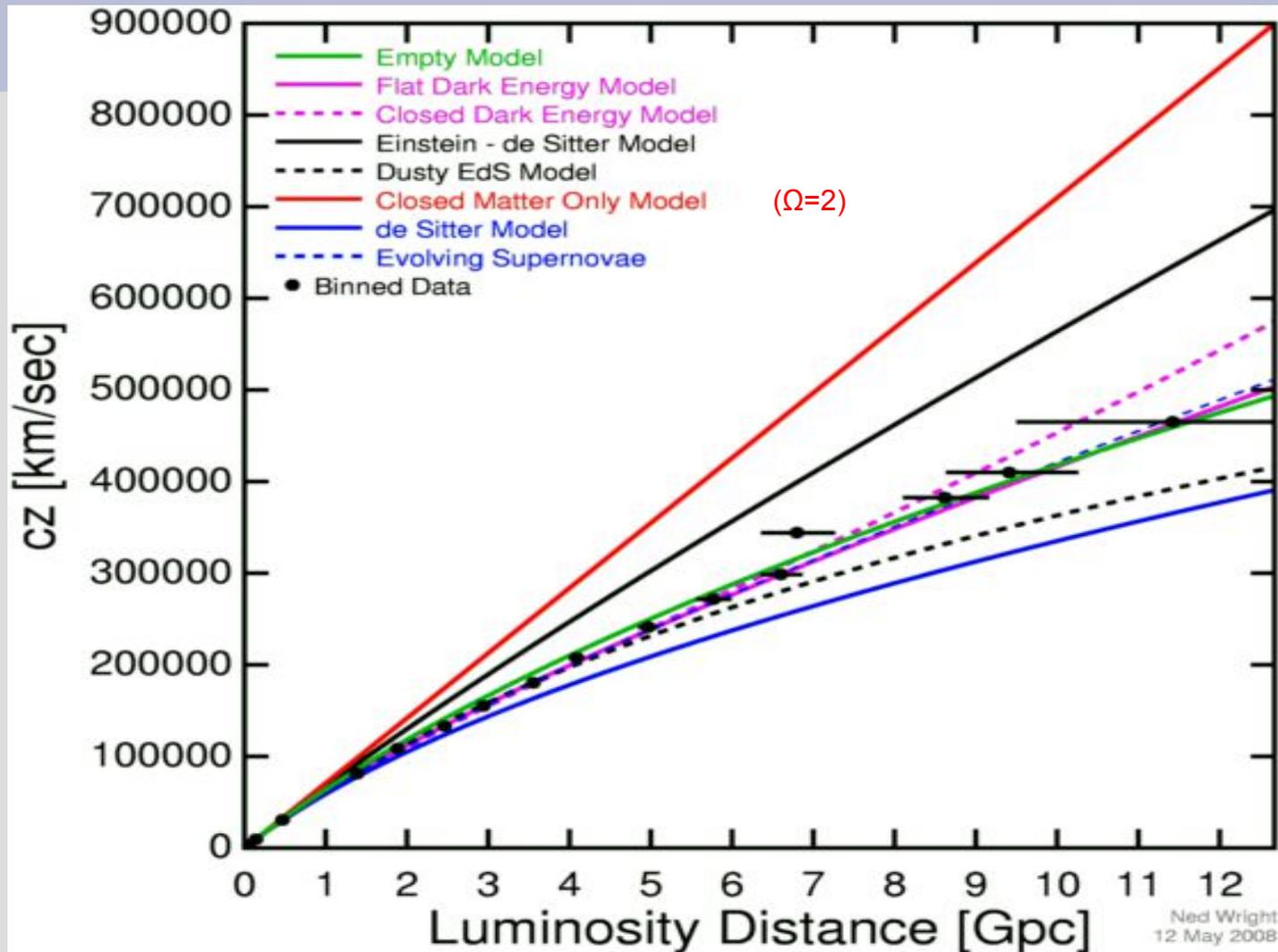
Ces données excluent les modèles qui ne donnent pas de relation linéaire entre  $cz$  et  $D_L$  pour  $cz$  petit.

Ces observations ont été étendues à des supernovae plus éloignées pour mesurer la non linéarité de la relation en entre  $cz$  et  $D_L$  lorsque  $cz$  n'est plus petit, et ont apporté une information plus significative sur la nature de l'Univers.

Pour que de telles abaques soient utiles (discriminantes vis à vis de modèles) il faut plusieurs observables « indépendantes » qui se comportent différemment pour les différents modèles.

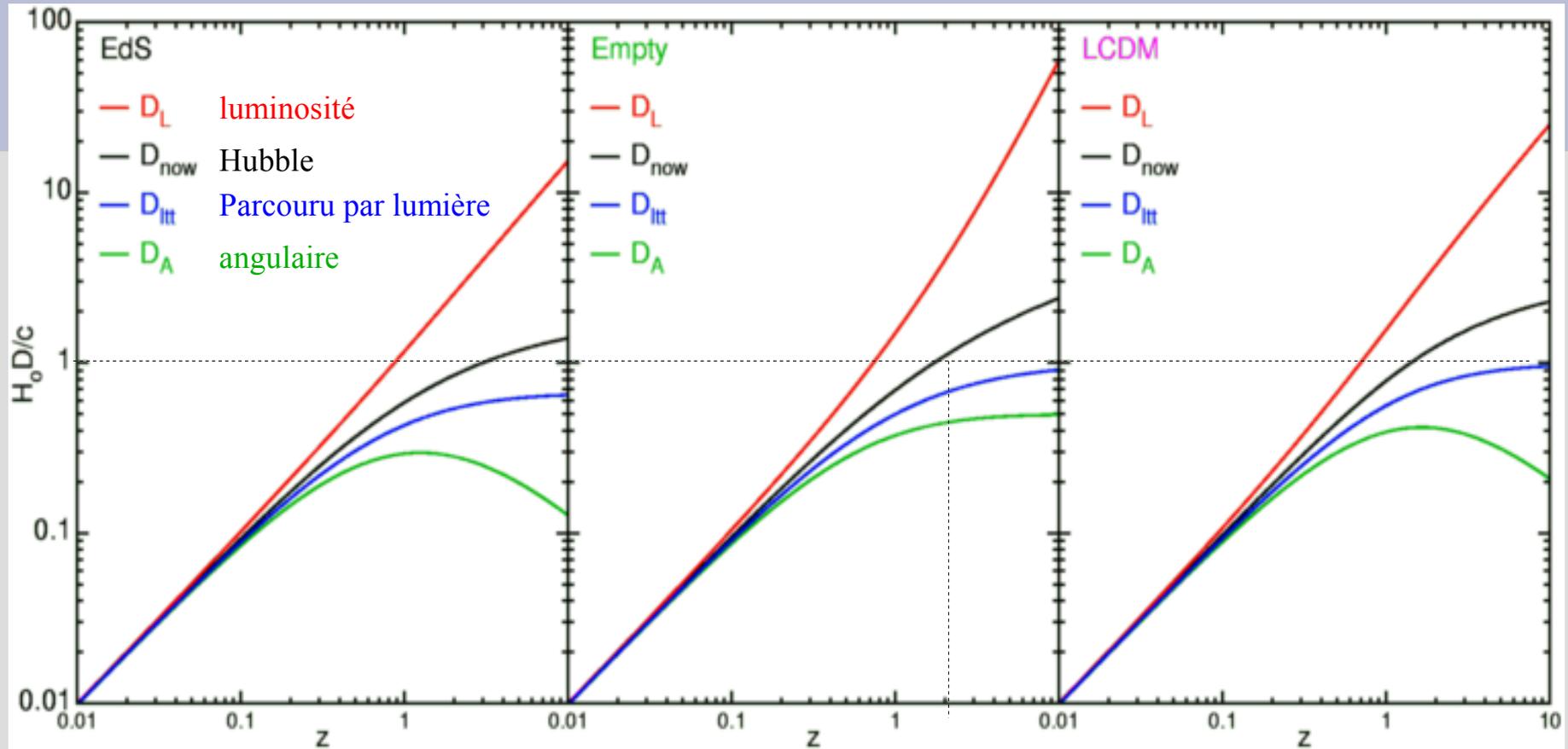
Le modèle correspond à une hypothèse et dans ce cas on va pouvoir faire un test d'hypothèse.

# Résultats du supernovae project



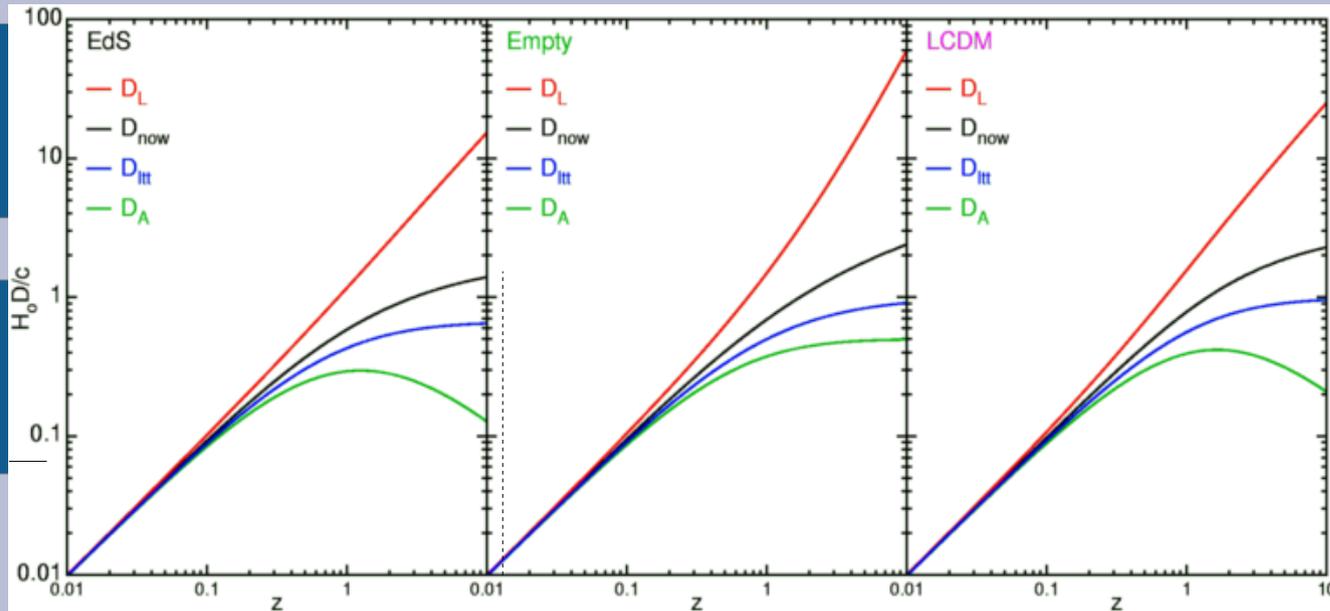
Vitesse de récession calculée à partir du décalage spectral en fonction de la distance de Luminosité: Dernières données disponibles : Kowalski et al. (2008).

# Distances = $f(z)$ pour 3 modèles



Ici, on montre les prédictions des différents modèles. A gauche le modèle Einstein De Sitter critique dominé par la matière, au centre le modèle vide, à droite *Lambda CDM* en accélération qui est celui privilégié aujourd'hui. Notons que les distances sont similaires à faibles distances mais divergent et de façon dépendant du modèle à grandes distances ( $H_0 D/c = 1 \rightarrow D = 4,1 Gpc = 13 Gal$ ).

# Interprétation diagrammes $D = f(z)$



L'ordonnée sur le diagramme est exprimée en unités  $H_0 D/c$  pour avoir la valeur 1 pour l'horizon des événements ce qui est visualisé par la distance  $D_{ltt}$ .

(Temps de trajet de la lumière).

Dans  $H_0 D/c$ ,  $D$  est la valeur de la distance calculée, quel que soit son type. Notons que les échelles sont logarithmiques, ce qui écrase les différences!

Commençons par le modèle EdS qui était le modèle de référence jusqu'à 1995. Pour une supernova SN1A, par exemple, observée à  $z = 1$  on obtient des valeurs très différentes pour les différentes « distances » calculées: La distance de luminosité  $H_0 D/c \approx 1,2$  vaut 4 fois la distance angulaire  $H_0 D/c \approx 0,3$  (cohérent avec le critère lié au RFC) et pratiquement le double de la distance de Hubble  $H_0 D/c \approx 0,6$ . On voit que sur tous les diagrammes, c'est la distance de luminosité qui est de loin la plus grande!

Pour le même  $z = 1$  le modèle LCDM prédit une distance de luminosité plus grande (sur le diagramme c'est peu lisible, mais les échelles sont logarithmiques). Autrement dit, il prédit qu'on reçoit moins de lumière de la SN1A que ce que prédit le modèle EdS pour un même  $z$ . Comme les observations ont confirmé ce point, les supernovae étaient « plus loin » que ne le prédisait le modèle EdS, ceci a conduit à son abandon au profit du modèle LCDM qui lui prédit la bonne valeur.

# Rayonnement de fond Cosmologique

Le RFC ( rayonnement de fond Cosmologique) ayant la caractéristique d'un corps noir parfait nous permet de déterminer la relation entre  $D_A$  et  $D_L$ .

Comme le RFC que nous observons aujourd'hui, vient de loin, mais a toujours une nature de corps noir, un corps noir lointain doit ressembler à un corps noir (même si sa température peut être modifiée par le décalage spectral).

La luminosité d'un corps est:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{em}^4$$

où  $R$  est le rayon,  $T_{em}$  est la température d'émission du corps noir et  $\sigma$  est la constante de Stephan-Boltzmann.

Observé à un décalage spectral  $z$  la température est :

$$T_{obs} = T_{em} / (1+z), \quad \text{et le flux est :} \quad F = \theta^2 \sigma T_{obs}^4,$$

$$\text{Avec: } \theta = R/D_A \quad \text{et} \quad F = L / (4\pi D_L^2).$$

# Rayonnement de fond Cosmologique

En combinant ces équations on obtient:

$$D_L^2 = L/(4\pi F) = (4\pi R^2 \sigma T_{em}^4)/(4\pi \theta^2 * \sigma T_{obs}^4) = D_A^2 (1+z)^4$$

soit

$$D_L = D_A (1+z)^2$$

Les modèles qui ne prédisent pas cette relation entre  $D_A$  et  $D_L$ , tels que le modèle chronométrique ou le modèle de la lumière fatiguée sont invalidés par les propriétés du RFC.

Nous verrons sur les diagrammes qui suivent que ce critère est satisfait par les modèles EdS, Vide et LCDM

## Rappel : Equation Friedman (Cours 2010)

L'équation de Friedman :  $(a'/a)^2 = (8\pi \cdot G \cdot \rho_{tot})/3 - k/a^2$  , en prenant en compte:

$\rho_{\Lambda} = \Lambda/8\pi G$  dans  $\rho_{tot} = (\rho_m + \rho_{\Lambda})$  peut s'écrire:

$a'^2(t) / a^2(t) = (8\pi G \rho) / 3 - k/a^2(t) + \Lambda/3$ , et de façon plus générale avec le rayonnement

$$a'^2(t) = (8\pi/3)(G \cdot \rho_{0rad} \cdot a_0^4) a^{-2}(t) + \{(8\pi/3)(G \cdot \rho_{0m} a_0^3)\} a^{-1}(t) - k + (\Lambda/3) a^2(t)$$

$$\Omega_{tot} - 1 = k/H^2 a^2 \quad , \quad \Omega_{tot} = 8\pi G \cdot \rho_{tot} / 3H^2 \quad (\Omega \text{ est de paramètre de densité} = \rho/\rho_{crit})$$

$$\text{avec : } \Omega_{tot} = \Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \{\Omega_{ray}\} \quad \text{Soit: } \Omega_m + \Omega_{\Lambda} + \Omega_k = 1$$

$$\Omega_m = 8\pi G \rho_m / 3H^2, \quad \Omega_{\Lambda} = \Lambda/3H^2, \quad \Omega_k = -k/a^2 H^2 = \text{paramètre de densité de courbure.}$$

En négligeant,  $\Omega_{ray}$ , aujourd'hui  $< 10^{-5}$

# Temps d'émission du signal reçu aujourd'hui exprimée en fonction de l'observable $z$ et des $\Omega$ .

Nous avons vu que l'équation donnant la distance à partir du temps d'émission du signal lumineux associé à un événement souffre du fait que celui ci n'est pas connu en général. Nous allons transformer cette équation pour la rendre calculable à partir d'observables.

L'équation de Friedmann Lemaître : 
$$\Omega_M + \Omega_K + \Omega_\Lambda = 1$$

Soit encore : 
$$H^2 = H_0^2 [\Omega_m (1+z)^3 + \Omega_k (1+z)^2 + \Omega_\Lambda]$$

La constante de Hubble  $H$  s'écrit : 
$$H = \frac{d}{dt} \log \left( \frac{a(t)}{a_0} \right) = \frac{d}{dt} \log \left( \frac{1}{(1+z)} = \frac{-1}{1+z} \right) \frac{dz}{dt}$$

En combinant ces relations, après quelques opérations, on arrive à :

$$t_0 - t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} (1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1 + \Omega_M z) - z(2+z)\Omega_\Lambda]^{-\frac{1}{2}} dz$$

Cette expression exprime la différence de temps à partir d'observables uniquement .

# Distance de luminosité en fonction de $z$ et des $\Omega$

Pour plus de détails, voir cours 2010, partie 3.

## Revenons au calcul de la distance de Luminosité

On peut noter que l' expression:

$$d_L = H_0^{-1} [z + 1/2(1 - q_0) z^2] + \varepsilon (z^3) \quad (78)$$

valable pour  $z \ll 1$  est l'évaluation au deuxième ordre de la formule exacte:

$$d_L(z, H_0, \Omega_m, \Omega_\Lambda) = (1+z) (H_0^{-1}) (|\Omega_k|^{-1/2}) S \left\{ |\Omega_k|^{1/2} \int_0^z dz' [(1+z')^2 (1+z' \Omega_m) - z'(2+z') \Omega_\Lambda]^{-1/2} \right\} \quad (79)$$

qui doit être utilisée si  $z$  n'est pas petit et qui s'évalue par calcul numérique (on a posé  $c=1$ , et  $S(x) = \sin x$ ,  $x$ , ou  $\sinh x$  pour les univers fermés, plats et ouverts.

Cette formule s'obtient à partir de la définition ( 70) de la distance de luminosité,

$$d_L = r a_0 (1+z) \quad (70)$$

# Distance de luminosité en fonction de $z$ et des $\Omega$

par le fait que la lumière se déplace sur une géodésique radiale nulle ( $ds^2=0$  métrique de RW avec  $d\theta, d\phi=0$ ), on a :

$$0 = ds^2 = - dt^2 + (a^2 / 1 - kr^2) . dr^2 \quad (71)$$

d'où  $dr/dt = (1 - kr^2)^{1/2} / a(t)$

soit :  $a_0 . dr / (1 - kr^2)^{1/2} = (1 + z) dt$

( en multipliant l'équation par  $a_0 = a(t_0)$  et de la définition de  $z$  :  $1+z = a_0/a$

En utilisant (72)  $\int_{t_1}^{t_2} dt/a(t) = \int_0^r dr.(1-kr^2)^{-1/2}$  et en remplaçant  $t$  par  $z$  selon (36 ter) ci dessous:  $t_0-t_1 = H_0^{-1} \int_0^{z_1} \{(1+z)^{-1} [(1+z)^2 (1+z \cdot \Omega_m) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2}\} dz \quad (36 \text{ ter})$

on arrive à:  $a_0 \int_0^{r_1} dr.(1 - kr^2)^{-1/2} = H_0^{-1} \int_0^{z_1} dz. [(1+z)^2 (1+z \cdot \Omega_m) - z(2+z) \Omega_\Lambda]^{-1/2}$

Les intégrales du membre de gauche sont :  $a_0 . K^{-1/2} . \arcsin(r_1 k^{1/2})$  si  $k > 0$ ,  $a_0 . r_1$  si  $k=0$ ,  $a_0 . k^{-1/2} . \operatorname{arcsinh}(r_1 . k^{1/2})$  si  $k=-1$

On exprime  $r_1$  en fonction de  $z$ ,  $a$  et  $d_L$  par la formule donnant la distance de luminosité (70) et en remplaçant

$\Omega_k = -k/ a_0^2 . H_0^2$  par sa valeur, on obtient la formule (79) exprimant la distance de luminosité en fonction du décalage spectral  $z$

# Synthèse modèle standard

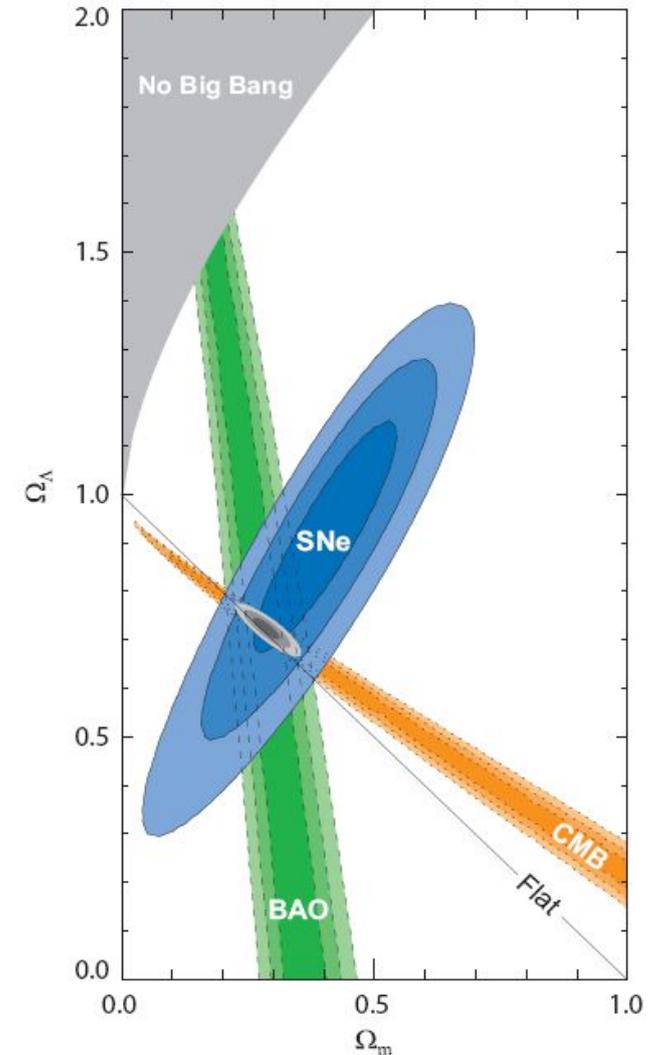
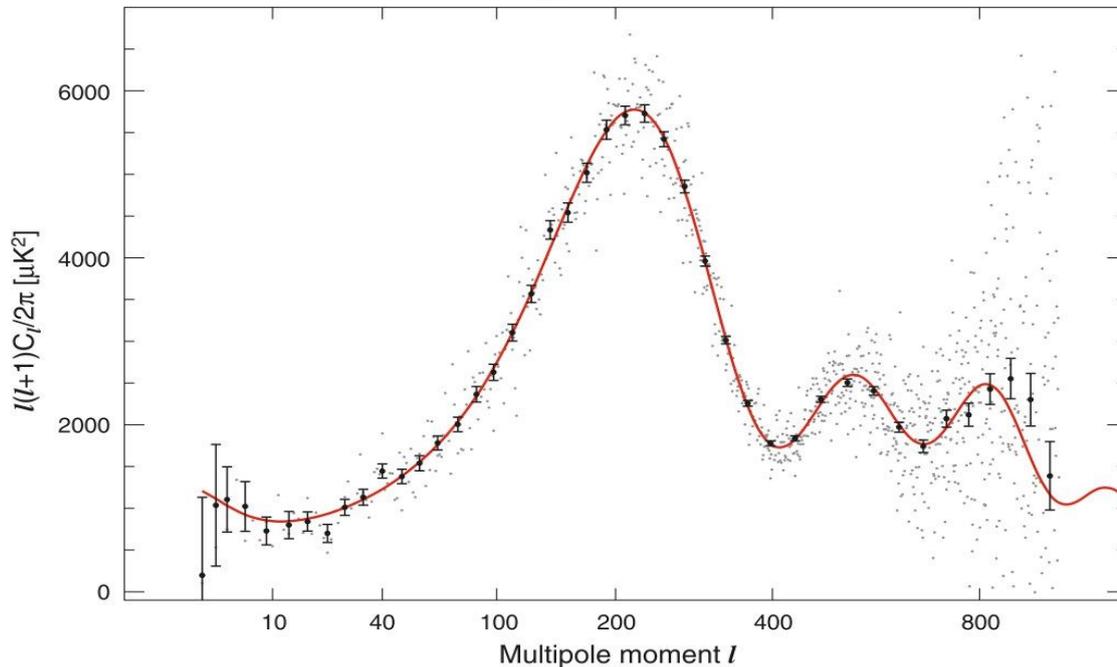
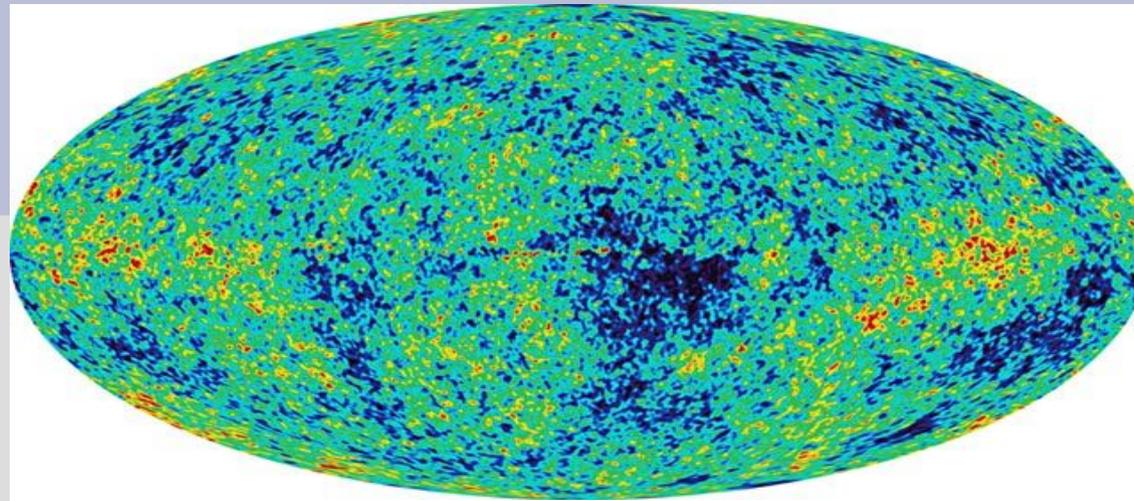


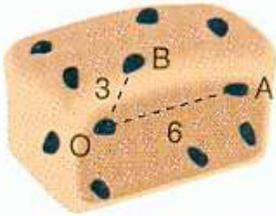
FIG. 15.— 68.3 %, 95.4 % and 99.7% confidence level contours on  $\Omega_\Lambda$  and  $\Omega_M$  obtained from CMB, BAO and the Union SN set, as well as their combination (assuming  $w = -1$ ).

CMB : Cosmic Microwave Background (RFC) , BAO : Baryon Acoustic Oscillation (décomposition en harmoniques sphériques du RFC), SN : Supernova 1A (nucléaires)

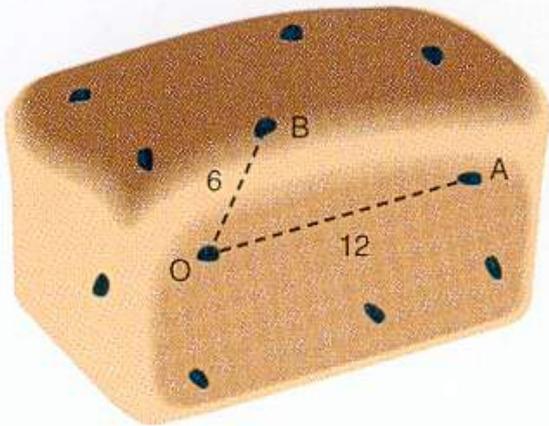
# Distances, facteur d'échelle: Annexe 1

$$V_B = dOB/dt = 3/dt, V_A = dOA/dt = 6/dt = 2 V_B$$

a)



b)



Dans l'hypothèse d'un univers de densité critique, les photons du RFC que nous captions maintenant ont été émis à  $T_0 + 300\,000$  ans, lorsque le facteur d'échelle "a" de l'univers était de 1/1100.

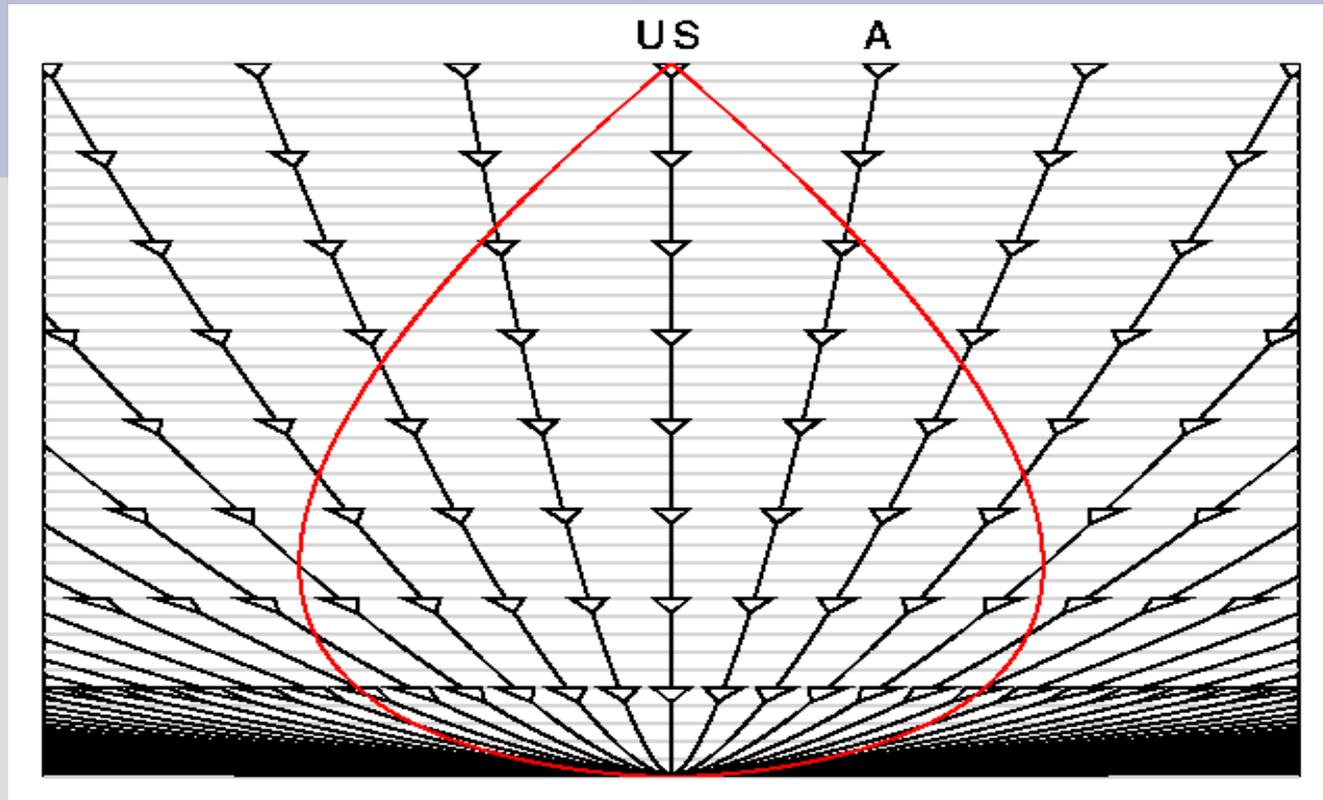
La constante de Hubble valait environ **3,2 millions de km/par méga parsec** (46 000 fois sa valeur actuelle) ce qui veut dire que deux objets distants d'environ 300 000 a.l avaient une vitesse de récession égale à  $c$ .

Comme le point (alors dans le RFC) qui dans le futur (après expansion) allait abriter la terre était distant d'environ 36 Millions d'années lumière (distance de Hubble) à cette époque, la vitesse de récession était supérieure à  $100 c$ .

Les photons ont commencé à s'éloigner emportés par l'expansion, avant de commencer à se rapprocher lorsque le rythme d'expansion s'est ralenti. Ce point d'émission des photons est aujourd'hui distant d'environ 40 milliards d'années lumière. (facteur d'échelle de 1100 et facteur 3 entre l'âge de l'univers  $T$  et sa dimension liée à l'expansion dans ce type d'univers).

Ne pas en déduire que l'univers est un pudding et qu'à ce titre il est anglais et éternel, comme nos amis britanniques voudraient nous le laisser croire!

# Annexe 2 : Diagrammes d'espace temps : univers critique



Le modèle correspondant à une densité critique est représenté ci dessus. Remarquons que les lignes d'univers sont maintenant courbées du fait de la gravitation qui provoque un ralentissement de l'expansion. En fait chaque ligne d'univers est proportionnelle à  $a(t)$ , qui vaut  $A*(t/t_0)^{2/3}$  pour  $\Omega_0 = 1$ , où  $A$  est une constante. La courbe rouge en forme de poire correspond à notre cône du passé (modélisé en poire par l'expansion).

# Notions de théorie quantique des champs

## 6-6 : Champs de jauge (Annexe 1)

### *Introduction*

Un Univers qui ne serait constitué que de quarks et de leptons serait ennuyeux et improductif. La dynamique est ce qui décrit leurs interactions, en particulier les états liés dans les hadrons et les atomes. Une conséquence intéressante de la Relativité et de la Mécanique Quantique est que leur interaction peut être décrite en termes d'échange de particules de médiation.

Ce n'est pas difficile à comprendre.

Considérons deux particules chargées, disons un proton et un électron, séparées par une distance finie. Etant chargées elles exercent l'une sur l'autre une action Coulombienne "électronique" . Supposons que nous déplaçons légèrement le proton. Le champ environnant va changer , ainsi que son influence sur l'électron. Mais la Relativité Restreinte nous dit que la perturbation ne peut pas se propager plus vite que la lumière ( pas d'action instantanée à distance).

### *Théorie des champs*

La description moderne des forces s'appuie sur la notion de champ, donc la perturbation va moduler le champ entre le proton et l'électron. La mécanique quantique considère ces modulations comme des degrés de liberté dynamiques qui doivent être quantifiés comme les autres. Les excitations minimales ( quanta) du champ sont interprétées comme des particules, et l'interaction entre un proton et un électron est décrit en termes d'échange de ces particules.

Comme les équations de Maxwell nous enseignent que le champ électromagnétique a des solutions ondulatoires, dont la lumière est un exemple, nous identifierons ces particules, associées au quanta du champ, aux photons qu'Einstein a introduit pour expliquer l'effet photo-électrique.

## *Electrodynamique quantique*

La théorie quantique décrivant l'interaction entre les photons et les électrons est appelée l'électrodynamique quantique ( QED pour Quantum ElectroDynamics). Cette théorie s'est révélée très fructueuse en termes de prédiction et de précision (  $10^{-11}$  ).

Il se trouve qu'on peut déduire l'électromagnétisme classique et la QED de symétries dites de "jauge" , introduites dans la théorie des électrons libres. La QED est l'exemple type d'une théorie de jauge.

### *Exemple des pions*

Regardons comment ça marche sur un exemple simple, qui nous permettra également d'introduire le concept de champ, fonction de l'espace temps dont la quantification des excitations élémentaires seront interprétées comme des particules.

Nous nous en tiendrons à la Relativité restreinte ( la Relativité Générale conduisant à un formalisme complexe rarement nécessaire, sauf en cas de conditions extrêmes, à proximité d'un trou noir par exemple). Un traitement plus exhaustif du champ Relativiste est présenté en annexes B et C.

Un pion,  $\pi^+$  par exemple, a un spin de 0 et peut être représenté par un champ scalaire  $\Phi(x)$  où  $x$  représente la coordonnée d'espace temps  $x^\mu$  .Par une transformation de **Lorentz**  $x \rightarrow x'$  et le champ se transforme comme suit:

$$\Phi'(x') = \Phi(x) \tag{6.2}$$

En théorie des champs Relativiste, il nous faut aussi décrire simultanément l'antiparticule  $\pi^-$ . Ceci est nécessaire du fait que dans les réactions énergétiques des paires de pions peuvent émerger ex nihilo. Par exemple dans les collisions proton/proton, la réaction:

$p + p \rightarrow p + p + \pi^+ + \pi^-$  est possible si l'énergie cinétique de la paire de protons incidente au centre de masse est supérieure à l'énergie de masse au repos des deux pions. On pourrait introduire deux champs scalaires  $\Phi_1(\mathbf{x})$  et  $\Phi_2(\mathbf{x})$  pour décrire respectivement le pion et l'antipion. Il est plus élégant de considérer  $\Phi_1(\mathbf{x})$  et  $\Phi_2(\mathbf{x})$  comme la partie réelle et imaginaire d'un champ complexe :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \rho(\mathbf{x}) e^{i\theta(\mathbf{x})} = (\Phi_1(\mathbf{x}) + i \Phi_2(\mathbf{x}))/\sqrt{2}.$$

### *Equation du mouvement*

Si le champ est sans interactions, il va satisfaire l'équation Relativiste du mouvement:

$$\square \Phi(\mathbf{x}) \equiv (\partial^2/\partial t^2 - \nabla^2) \Phi(\mathbf{x}) = m^2 \Phi(\mathbf{x}) \quad (6.3)$$

où  $m$  est la masse du pion ( Cette équation s'appliquant aussi pour le champ conjugué  $\Phi^*$  qui associé à  $\Phi$  peut produire deux états indépendants au lieu des deux fonctions  $\Phi_1(\mathbf{x})$  et  $\Phi_2(\mathbf{x})$ ). Cette équation est invariante par transformation de Lorentz car le d'Alembertien  $\square$  et  $m^2$  sont invariants tous les deux.

L'équation (6.3) peut être dérivée de l'équation d'Euler Lagrange ( cf B.27)

$$\partial L/\partial \Phi^* - \partial_\mu (\partial L/\partial \Phi^*_{,\mu}) = 0 \quad (6.4)$$

## *Choix du Lagrangien*

Si nous choisissons la densité de Lagrangien invariante par transformation de Lorentz  $L(x)$

$$L(x) = 1/2 (\partial_\mu \Phi(x))^* (\partial^\mu \Phi(x)) + m^2/2 (\Phi^*(x) \Phi(x)) \quad (6.5)$$

### **Invariance globale**

On voit que (6.5) est invariant par changement de la phase d'une même valeur partout,  $\Phi \rightarrow e^{i\alpha} \Phi$  avec  $\alpha$  **constant**, du fait de la présence des fonctions conjuguées. Ceci est appelé une invariance globale du Lagrangien.

### *Invariance locale*

Supposons maintenant que nous voulions que le Lagrangien soit aussi invariant par un changement de phase qui pourrait avoir une valeur différente en chaque point,  $\alpha = \alpha(x)$ . Ceci est appelé une invariance locale ou encore invariance de jauge. Tel quel, les dérivées partielles ne permettent pas l'invariance. Nous sommes amené à ajouter d'autres champs  $A_\mu(x)$  à la dérivée avec les règles suivantes:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu \equiv \partial_\mu - iA_\mu(x) \quad (6.6)$$

et poser

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x) \quad (6.7)$$

Quand

$$\Phi(x) \rightarrow e^{i\alpha(x)} \Phi(x)$$

Le champ  $A_\mu$  que nous avons ainsi introduit s'appelle le potentiel électromagnétique.

## *Dérivée covariante de jauge*

L'équation (6.6) définit  $\mathbf{D}_\mu$  la dérivée covariante de jauge, qui est similaire à la dérivée covariante que nous avons introduit en Relativité Générale ( cf 3.36).

L'équation du mouvement devient alors:

$$(\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu - m^2)\Phi(\mathbf{x}) = 0 \quad (6.8)$$

qui décrit les propriétés électromagnétiques d'un champ scalaire chargé.

### **Démonstration: de l'invariance du Lagrangien par la dérivée covariante de jauge**

$$\mathbf{D}_\mu \phi(\mathbf{x}) \rightarrow \partial_\mu \phi(\mathbf{x}) - iA_\mu(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) \quad (6.6 \text{ bis})$$

$$\mathbf{D}_\mu e^{i\alpha(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}) \rightarrow$$

$$\partial_\mu \phi(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})} \Phi(\mathbf{x}) + i \phi(\mathbf{x}) \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})} - iA_\mu(\mathbf{x})\phi(\mathbf{x}) - i \phi(\mathbf{x}) \partial_\mu \alpha(\mathbf{x}) e^{i\alpha(\mathbf{x})} = \mathbf{D}_\mu \phi(\mathbf{x})$$

et idem pour l'autre terme relatif à  $\Phi^*(\mathbf{x})$ , le produit  $\mathbf{D}_\mu \mathbf{D}^\mu$  vérifie l'invariance.

# Rotations et spineurs

- Groupe SO3 : 3 = matrices R(3x3) de dimension 3 à coeff. réels de Det = +1 :S= spécial), O = Orthogonal (  $R^t=R^{-1}$ )
- En théorie des groupes on montre que les rotations spatiales en 3D quelconques forme un groupe non abélien (SO3) et peuvent être décrites comme un enchaînement de rotations infinitésimales (ce qui caractérise la continuité de la transformation) qui peuvent elles mêmes être décrites par une loi utilisant trois matrices (3x3) complexes  $J_i$  opérant sur des vecteurs 3D de composantes  $V_i$ .

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \\
 J_x = & & J_y = & J_z =
 \end{array}$$

- La rotation (non triviale) autour d'un axe orienté  $\mathbf{n}$  est alors définie par :
- $R(\theta, \mathbf{n}) = e^{i\theta\mathbf{J}} = e^{i(\theta_x J_x + \theta_y J_y + \theta_z J_z)}$

Les vecteurs en physique sont alors définis, non pas comme des éléments d'un espace vectoriel (structure linéaire) mais comme les objets qui engendrent le groupe des rotations spatiales.

- Groupe SU2, Spécial, Unitaire ( $U^\dagger = U^{-1}$ ), de dimension 2, matrices (2x2)

L'ensemble des trois  $J_i$  obéissent à la loi de commutation,

$$[J_i, J_j] = i \sum_{k=1-3} \epsilon_{ijk} J_k \quad (\text{avec } i^2 = -1 \text{ et } \epsilon_{ijk} \text{ symbole Levi-Civita})$$

Ceci forme l'algèbre de Lie du groupe non abélien des rotations et le caractérise. Cette loi définit aussi ses constantes de structure  $i\epsilon_{ijk}$

- Le groupe SU2 où les  $J_i$  sont des matrices complexes (2x2) est le groupe associé à la représentation de dimension 2 du groupe des rotations.
- Il se révèle être le recouvrement universel du groupe non abélien des rotations spatiales SO3 (Spécial, Orthogonal, 3D).
- Retour à l'état initial par rotation  $4\pi$ .
- Les objets manipulés sont des spineurs ayant deux composantes à la différence du groupe SO3 qui manipule des vecteurs.